

1

- (1) $z_n = w^{P_n}$ とおく
 $z_{n+1} = w^{P_n} \cdot w^{2n+1} = w^{P_n+2n+1}$
 とあるから、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して、 $z_n = w^{P_n}$ の形であり
 $P_{n+1} = P_n + 2n + 1, P_1 = 1$
 である。したがって
 $P_n = 1 + \sum_{k=1}^n (2k+1) = n^2$
 $\therefore z_n = w^{n^2}$
 したがって、その偏角は $5^\circ \times n^2$ であるから、 z_n が実数になるための条件は
 $5^\circ \times n^2 = 180^\circ \times N \quad (N \text{ は整数})$
 $\therefore n^2 = 36N$
 である。これは n が 6 の倍数であることと同値である。
- (2) $\angle P_n O P_{n+1} = 5^\circ \times (2n+1)$ であり
 $1 \leq n \leq 17$ のとき、 $3 \leq 2n+1 \leq 35$ であるから、
 $5^\circ \times (2n+1)$ は、 180° より小さい。
 $\angle P_n O P_{n+1}$ は 90° にはならない。
 よって、 $5^\circ \times (2n+1) = 45^\circ \quad \therefore n = 4$ [答]
 またそのとき、 $\frac{OP_{n+1}}{OP_n} = a^{2n+1} = a^9$ であるが、
 これが $\sqrt{2}$ または $\frac{1}{\sqrt{2}}$ に成らなければならない。
 $\therefore a^9 = 2^{\pm \frac{1}{2}} \quad \therefore a = 2^{\pm \frac{1}{18}}$ [答]

2

- (1) $f(t) = \frac{\log t}{2} + \frac{1-t}{1+t} = \frac{\log t}{2} + \frac{2}{t+1} - 1$
 とおく。微分すると
 $f'(t) = \frac{1}{2t} - \frac{2}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}$
 とある。 $0 < t < 1$ では $f'(t) > 0$ であるから、 $f(t)$ は単調増加であり、かつ $f(1) = 0$ である。
 $\therefore 0 < t < 1$ では、 $f(t) < 0$ 。
 $\therefore \frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$
- (2) $y = e^{ax}$ より $y' = ae^{ax}$ であるから、 P, Q の接線は
 $y = ae^{ax}(x-a) + e^{ax}$
 $y = ae^{-ax}(x+a) + e^{-ax}$
 これを連立して、 y を消去し、 x について解くと
 $x = -\frac{1}{a} + a \frac{1+e^{-2ax}}{1-e^{-2ax}}$
 とある。 $e^{-2ax} = t$ とおく。 $\therefore a = -\frac{\log t}{2a}$ であり
 $x = \frac{2a}{\log t} + a \frac{1+t}{1-t}$
 $= a \left(\frac{2}{\log t} + \frac{1+t}{1-t} \right)$
 $a > 0, a < 0$ であるから、 $0 < t < 1$ である。したがって
 (1) により $x > 0$ である。

3

- (1) $f(x)$ を n 次式とし $f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$
 とする。 $p_0 \neq 0$ とある。 $x \neq 0$ の範囲では
 $f(x) = x^n \left(p_0 + \frac{p_1}{x} + \dots + \frac{p_n}{x^n} \right)$
 と書ける。 $f(a_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$ とすると
 $f(a_k) = a_k^n \left(p_0 + \frac{p_1}{a_k} + \dots + \frac{p_n}{a_k^n} \right)$
 と表せるが、 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ であるから、
 $p_0 > 0$ なら $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \infty$
 $p_0 < 0$ なら $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = -\infty$
 とあるのに矛盾する。 よって $f(x)$ は次数を持たない
 唯一の整式 $f(x) = 0$ である。
- (2) $a_k = k\pi \quad (k=1, 2, \dots)$ とおく。これを代入すると
 $F(a_k) = f_1(a_k)$
 であるが、これがすべて 0 になる。 (1) より $f_1(x) = 0$ である。
 $\therefore F(x) = f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$
 とある。 $a_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=1, 2, \dots)$ を代入すると
 $F(a_k) = f_2(a_k)$
 であるが、これがすべて 0 になる。 (1) より $f_2(x) = 0$ である。
 $\therefore F(x) = f_3(x) \sin 2x$
 とある。 $a_k = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k=1, 2, \dots)$ を代入すると
 $F(a_k) = f_3(a_k)$
 である。これがすべて 0 になる。 (1) より $f_3(x) = 0$ である。

4

- (1) $l \geq 2$ であるから $\lim_{s \rightarrow \infty} l^s = \infty$ であり、したがって
 $l^1, l^2, l^3, \dots, l^s, \dots$
 のすべてが l^n 以下ということはあり得ない。
 これらのうち、 $l^n < l^s$ を満たす最小の s を m とおく
 $m > 1$ のとき、最小性により $l^{m-1} \leq l^n < l^m$
 $m=1$ のとき、 $l^0 = 1, l \geq 2$ であるから、
 やはり $l^{m-1} \leq l^n < l^m$ が成り立つ。
- (2) $a_k l = a_k + a_l$ ①
 において $l=1$ とおくと $a_k = a_k + a_1 \quad \therefore a_1 = 0$ である。
 これと増加数列であることより、 a_2 以降は正である。
 また①を k 回繰り返し使うと
 $ma_k = a_k + a_k + \dots + a_k = a_k + \dots + a_k = a_k m$
 が成り立つ。よって (1) の m を選ぶと、増加数列だから
 $a_k^{m-1} \leq a_k m < a_k^m$
 $\therefore (m-1)a_k \leq m a_k < m a_l$
 となり、 $l \geq 2$ なら $a_l > 0$ である。
 $\frac{m-1}{m} \leq \frac{a_k}{a_l} < \frac{m}{m} \quad \text{②}$
 とある。他方、 $\log x$ も増加関数だから、(1) の m に対し
 $\log l^{m-1} \leq \log a_k m < \log a_l^m$
 $\therefore (m-1) \log l \leq m \log a_k < m \log a_l$
 となり、 $l \geq 2$ なら $\log l > 0$ である。
 $\frac{m-1}{m} \leq \frac{\log a_k}{\log l} < \frac{m}{m} \quad \text{③}$
 とある。②と③により
 $\frac{m-1}{m} - \frac{m}{m} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log a_k}{\log l} < \frac{m}{m} - \frac{m-1}{m}$
 $\therefore -\frac{1}{m} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log a_k}{\log l} < \frac{1}{m}$
- (3) 上の結果は、 k, l と無関係に任意の m に対し成り立つ。
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$ であるから、 $k \geq 2, l \geq 2$ であれば
 $\frac{a_k}{a_l} = \frac{\log a_k}{\log l} \quad \therefore \frac{a_k}{\log a_k} = \frac{a_l}{\log a_l}$
 である。これが任意の k と l の間で成り立つから
 $k \geq 2$ なる任意の k に対し $\frac{a_k}{\log a_k} = C$ (C は定数)
 $\therefore a_k = C \log a_k$
 $a_2 = a$ であるから、 $C = \frac{a}{\log 2}$ とある。
 よって $a_k = a \frac{\log a_k}{\log 2}$ [答]
 (これは $k=1$ のときも $a_1 = 0$ に一致する)

5

- (1) 楕円の中心 $E(a, b)$ とする。楕円は A と同じ第 1 象限にあるので $a > 0, b > 0$ である。楕円の方程式は
 $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$ である。
 これが $A(1, 2)$ を通るため、 $x=1, y=2$ を代入すると
 $\left(\frac{1}{a}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{b}-1\right)^2 = 1 \quad \text{①}$
 とある。これは $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{b}\right)$ が $(1, 1)$ を中心とする半径 1 の円周上にあることと同じである。 $\frac{1}{a}$ の範囲は
 $0 < \frac{1}{a} \leq 2 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq a$ [答]
- (2) 上の $\frac{1}{a}$ に対し、 $\frac{2}{b}$ が 2 つ存在する a の範囲は
 $0 < \frac{1}{a} < 1, 1 < \frac{1}{a} < 2 \quad \therefore \frac{1}{2} < a < 1, 1 < a$
 である。他方、①を b について解くと
 $b = \frac{2}{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}-1\right)^2}} = \frac{2a}{a \pm \sqrt{2a-1}} = \frac{2a(a \mp \sqrt{2a-1})}{(a-1)^2}$
 これを b_1, b_2 ($b_1 > b_2$) とすると、 $\triangle ABC$ の面積は
 $S(a) = \frac{1}{2} |a-1| (b_1 - b_2) = \frac{2a \sqrt{2a-1}}{|a-1|}$
 $\therefore f(a) = \frac{2a \sqrt{2a-1}}{a-1}$ とおく。 $S(a) = |f(a)|$ である。
 $f'(a) = \frac{(2\sqrt{2a-1} + 2a \frac{1}{\sqrt{2a-1}})(a-1) - 2a \sqrt{2a-1}}{(a-1)^2}$
 $= \frac{2(a^2 - 3a + 1)}{(a-1)^2 \sqrt{2a-1}}$
 $f'(a) = 0$ とおくと $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ とあるが
 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ であるから、 $f(a)$ の増減は下表のとおり
- | | | | | | | |
|--------|---------------|------------|----------|------------|---------------------------------|------------|
| a | $\frac{1}{2}$ | | 1 | | $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ | |
| $f(a)$ | $\times$ | - | $\times$ | - | 0 | + |
| $f(a)$ | 0 | $\searrow$ | $\times$ | $\searrow$ | $(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}$ | $\nearrow$ |
- $S(a)$ のグラフは $f(a)$ のグラフ $a = \frac{1}{2} < a < 1$ の部分を折り返して、次のように成る。

