

1 平面ベクトル $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$ に対して $\{\vec{p}, \vec{q}\} = p_1q_2 - p_2q_1$ と定める.

- (1) 平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して $\{\vec{a}, \vec{b}\} = \ell$, $\{\vec{b}, \vec{c}\} = m$, $\{\vec{c}, \vec{a}\} = n$ とするとき

$$\ell \vec{c} + m \vec{a} + n \vec{b} = \vec{0}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) (1) で ℓ, m, n がすべて正であるとする. このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて

$$\vec{d} = r \vec{a} + s \vec{b} + t \vec{c}$$

と表すことができることを示せ.

(配点率 30 %)

2 自然数 m に対して、 m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72) = 6$ である。ただし $f(1) = 1$ とする。

(1) m, n を自然数、 d を m, n の最大公約数とすると

$$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$$

となることを示せ。

(2) 2つの箱 A, B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている。箱 A, B から 1 枚ずつ札を取り出す。箱 A から取り出した札の番号を m 、箱 B から取り出した札の番号を n とするとき

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_1 と

$$2f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_2 を求めよ。

(配点率 35 %)

- 3 放物線 $C: y = -x^2 + 2x + 1$ と x 軸の共有点を $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ とし, C と直線 $y = mx$ の共有点を $P(a, ma)$, $Q(\beta, m\beta)$, 原点を O とする. ただし $a < b$, $m \neq 0$, $a < \beta$ とする. 線分 OP , OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ , OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ.

(配点率 35 %)