

1

a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である.

また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
- (2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

(配点率 20%)

2

(1) $0 < t < 1$ のとき, 不等式

$$\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$$

が成り立つことを示せ.

(2) k を正の定数とする. $a > 0$ とし, 曲線 $C: y = e^{kx}$ 上の 2 点 $P(a, e^{ka})$, $Q(-a, e^{-ka})$ を考える. このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ.

(配点率 20%)

3

(1) $f(x)$ を x の 整 式 と し, $\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1} (k = 1, 2, \dots)$ お よ び

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ をみたす数列とする. このとき

$$f(a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ.

(2) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を x の整式とし

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする. このとき $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ.

(配点率 20%)

4 数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および

$$a_{k\ell} = a_k + a_\ell, \quad k = 1, 2, \dots, \ell = 1, 2, \dots$$

をみたすとする.

(1) k, ℓ を 2 以上の自然数とする. 自然数 n が与えられたとき

$$\ell^{m-1} \leq k^n < \ell^m$$

をみたす自然数 m が存在することを示せ.

(2) k, ℓ を 2 以上の自然数とすると

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ.

(配点率 20%)

5

- (1) 平面上において座標軸に平行な主軸(長軸, 短軸)をもち, x 軸, y 軸の両方に接する楕円を考える. その中心の x 座標を a とする. このような楕円のうち点 $A(1, 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ. ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする.
- (2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して, その 2 つの楕円の中心を B, C とする. $\triangle ABC$ の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ.

(配点率 20%)