

1 (1) $f'(x)=0$ が相異なる2実解をもつ条件を求めればよい.

$$f'(x)=3x^2+6ax+b$$

より

$$D/4=(3a)^2-3b>0 \iff \boxed{b<3a^2}$$

(2) $f'(x)=0$ の解が α , β で解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{6a}{3}=-2a, \quad \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

より

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 4a^2 - \frac{4}{3}b = \frac{4}{3}(3a^2 - b)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}f(\beta)-f(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} 3(x-\alpha)(x-\beta)dx \\ &= -\frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3 = -\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}\end{aligned}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}m &= \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \\ &= -\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} = \boxed{\frac{2}{3}(b-3a^2)}\end{aligned}$$

また, $f(x)=(x+a)^3+(b-3a^2)(x+a)+2a^3-ab+c$

$$=(x+a)^3+\frac{3}{2}m(x+a)+2a^3-ab+c$$

よって $y=x^3+\frac{3}{2}mx$ を x 軸方向に $-a$, y 軸方向に

$2a^3-ab+c$ 平行移動したグラフが $y=f(x)$ となる. したがって

$$y=f(x) \text{ を } \begin{cases} x \text{ 軸方向に } a \\ y \text{ 軸方向に } -2a^3+ab-c \end{cases}$$

平行移動すると $y=x^3+\frac{3}{2}mx$ になる.

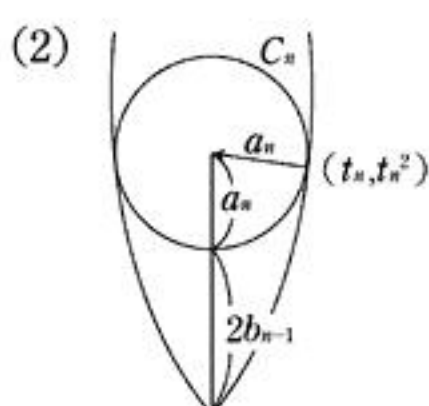
2 (1) D 内にあり y 軸上に中心をもち原点 $(0, r)$ を通る円は

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

とかける. これが $y = x^2$ との共有点が原点だけとなる最大の r を求める.

$$\begin{cases} x^2 + (y - r)^2 = r^2 \\ y = x^2 \end{cases} \text{より} \quad y + (y - r)^2 = r^2 \quad \therefore y\{y - (2r - 1)\} = 0$$

したがって $2r - 1 \leq 0$ であればよい. $\therefore r \leq \frac{1}{2}$ $a_1 = \frac{1}{2}$



$n \geq 2$ のとき, $y = x^2$ は C_n は外接していることに注意して接点を (t_n, t_n^2) とおく. ($t_n > 0$)

また, 左図より C_n は
中心 $(0, 2b_{n-1} + a_n)$, 半径 a_n の円

$$x^2 + \{y - (2b_{n-1} + a_n)\}^2 = a_n^2 \text{ である.}$$

ここで, $y = x^2$ は C_n に外接していることから, C_n の (t_n, t_n^2) における接線と $y = x^2$ の (t_n, t_n^2) における接線が一致することに着目する.

C_n の (t_n, t_n^2) における接線は

$$t_n x + \{t_n^2 - (2b_{n-1} + a_n)\} \{y - (2b_{n-1} + a_n)\} = a_n^2 \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $\textcircled{1}$ が y 軸に平行になることはないので,

$t_n^2 - (2b_{n-1} + a_n) \neq 0$ に注意して

$$y = \frac{-t_n}{t_n^2 - (2b_{n-1} + a_n)} x + \frac{a_n^2}{t_n^2 - (2b_{n-1} + a_n)} + 2b_{n-1} + a_n \cdots \textcircled{1}'$$

また, $y = x^2$ の (t_n, t_n^2) における接線は $y' = 2x$ より

$$y - t_n^2 = 2t_n(x - t_n) \quad \therefore y = 2t_n x - t_n^2 \cdots \textcircled{2}$$

よって $\textcircled{1}'$, $\textcircled{2}$ の係数を比較して

$$\begin{cases} 2t_n = \frac{-t_n}{t_n^2 - (2b_{n-1} + a_n)} \\ -t_n^2 = \frac{a_n^2}{t_n^2 - (2b_{n-1} + a_n)} + 2b_{n-1} + a_n \end{cases}$$

より, t_n を消去して

$$a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} - 2b_{n-1} = 0 \cdots \textcircled{3}$$

を得る.

$$\therefore a_n = \frac{1 \pm 2\sqrt{2b_{n-1}}}{2}, \quad b_{n-1} \geq a_1 = \frac{1}{2}$$

より

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2} + \sqrt{2b_{n-1}}}$$

(3) (2) の $\textcircled{3}$ 式より

$$2b_{n-1} = a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} \cdots \textcircled{4}$$

同様に

$$2b_n = a_{n+1}^2 - a_{n+1} + \frac{1}{4} \cdots \textcircled{5}$$

$b_n - b_{n-1} = a_n$ に注意して, $\textcircled{5} - \textcircled{4}$ を計算すると

$$2(b_n - b_{n-1}) = a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_{n+1} + a_n$$

$$\therefore 2a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_{n+1} + a_n$$

$$\therefore (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 1) = 0$$

したがって, $a_{n+1} + a_n > 0$ より $a_{n+1} = a_n - 1$ を得て

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1) + a_1 \\ &= n-1 + \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2} \quad \therefore \boxed{a_n = n - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$3 \quad (1) \quad A \xrightarrow[1\text{投}]{\frac{5}{6}} B \xrightarrow[2\text{投}]{\frac{5}{6}} A \xrightarrow[3\text{投}]{\frac{5}{6}} \cdots \xrightarrow[2k-1\text{投}]{\frac{5}{6}} B \xrightarrow[2(k-1)\text{投}]{\frac{5}{6}} A \xrightarrow[\frac{1}{6}]{\frac{1}{6}} \text{終了}$$

A が k 投目を行うとき、それまでに、サイコロは $2(k-1)$ 投されており、その目は1以外である、よって求める確率を P_k とすると

$$P_k = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{2(k-1)} = \boxed{\frac{1}{6} \left(\frac{25}{36} \right)^{k-1}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P_n &= \sum_{k=1}^n P_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{25}{36} \right)^n}{1 - \frac{25}{36}} = \boxed{\frac{6}{11} \left\{ 1 - \left(\frac{25}{36} \right)^n \right\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P_n &> \frac{1}{2} \iff \frac{6}{11} \left\{ 1 - \left(\frac{25}{36} \right)^n \right\} > \frac{1}{2} \\ &\iff \left(\frac{25}{36} \right)^n < \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(よって両辺の $\log_{10}$ をとることで)

$$\begin{aligned} &\iff \log_{10} \left(\frac{25}{36} \right)^n < \log_{10} \frac{1}{12} \\ &\iff n > \frac{1}{2} \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 6 - \log_{10} 5} \end{aligned}$$

ここで $1 = \log_{10} 10 = \log_{10} 2 + \log_{10} 5$

$\therefore \log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 6 - \log_{10} 5} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - (1 - \log_{10} 2)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3}{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0.3010 + 0.4771}{2 \cdot 0.3010 + 0.4771 - 1} = 6.8 \cdots \end{aligned}$$

したがって求める n は 7