

1 (1) $z_k = x_k + iy_k$ とおくと $0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$ より

$$x_k \geq 0, \quad y_k \geq 0 \cdots \textcircled{1}$$

となる.

まず, $n \geq 2$ に対して

$$\operatorname{Re}((z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n}) \geq 0 \cdots \textcircled{2}$$

を示す.

$$\begin{aligned} & \because (z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n} \\ &= \{(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + i(y_1 + \cdots + y_{n-1})\} (x_n - iy_n) \\ &= x_n(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + y_n(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + iy_n \\ &\therefore \operatorname{Re}((z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n}) \\ &= x_n(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + y_n(y_1 + \cdots + y_{n-1}) \end{aligned}$$

①より $x_n(x_1 + \cdots + x_{n-1}) \geq 0$, $y_n(y_1 + \cdots + y_{n-1}) \geq 0$ だから
②が成立する.

そこで, 題意を帰納法により示す.

$n=1$ のとき, $|z_1|^2 \leq |z_1|^2$ より成立

$n \geq 2$ として, $n-1$ で成立を仮定する. n のときは,

$$\begin{aligned} & |z_1 + \cdots + z_{n-1} + z_n|^2 \\ &= (z_1 + \cdots + z_{n-1} + z_n)(\overline{z_1 + \cdots + z_{n-1} + z_n}) \\ &= (z_1 + \cdots + z_{n-1} + z_n)(\overline{z_1 + \cdots + z_{n-1}} + \overline{z_n}) \\ &= (z_1 + \cdots + z_{n-1})(\overline{z_1 + \cdots + z_{n-1}}) + z_n \overline{z_n} \\ &\quad + \underbrace{(z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n} + (\overline{z_1 + \cdots + z_{n-1}})z_n}_{2\operatorname{Re}((z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n})} \\ &= |z_1 + \cdots + z_{n-1}|^2 + |z_n|^2 \\ &\quad + 2\operatorname{Re}((z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n}) \\ &\geq |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 + |z_n|^2 \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &\quad + 2\operatorname{Re}((z_1 + \cdots + z_{n-1})\overline{z_n}) \\ &\geq |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 + |z_n|^2 \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

したがって帰納法により題意は示された.

(2) (1)で $z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$ とおくと, $\theta_k = \arg z_k$ より

$0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$ は満たされているので, (1)の結果が使える.

$|z_k|^2 = 1$ に注意して,

$$\begin{aligned} & |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq |z_1 + \cdots + z_n|^2 \\ & \iff n \leq |(\cos\theta_1 + \cdots + \cos\theta_n) + i(\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n)|^2 \\ & \iff n \leq |1 + i(\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n)|^2 \\ & \iff n \leq 1 + (\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n)^2 \\ & \iff n-1 \leq (\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n)^2 \end{aligned}$$

したがって $\sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n \geq 0$ より

$\sqrt{n-1} \leq \sin\theta_1 + \cdots + \sin\theta_n$ が成立する.

$$2 \quad (1) \quad \text{仮定より} \quad \begin{cases} a_1 \equiv 0 \pmod{m} \cdots \textcircled{1} \\ a_2 \equiv 0 \pmod{m} \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{である.}$$

$$\textcircled{1} \text{より} \quad a_1 = p + 4q \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\therefore \begin{cases} p + 2q \equiv -2q \pmod{m} \\ p - 2q \equiv -4q \pmod{m} \end{cases}$$

$$\text{また, } a_2 = p^2 - 4q^2 = (p - 2q)(p + 2q) \equiv 12q^2 \pmod{m}$$

$$\text{よって } \textcircled{2} \text{より } 12q^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

ここで $q^2 \equiv 0 \pmod{m}$ とすると q は素数より $q \equiv 0 \pmod{m}$
すなわち $m = q$

$$\text{すると, } \textcircled{1} \text{から } a_1 = p + 4q \equiv p \pmod{q} \quad \therefore p \equiv 0 \pmod{q}$$

したがって p は q の倍数となり, 矛盾

m は 12 の約数のうち 1 を除いた 2, 3, 4, 6, 12 の可能性に限られる. このとき, $p > 2q$ より p は 2 でない素数だから奇素数. したがって $p + 4q$ は奇数となる. 一方で $m = 2, 3, 4, 6, 12$ となるためには, $p + 4q$ は偶数となる必要がある. したがって, $m = 2, 4, 6, 12$ はありえない.

よって $m = 3$ に限られる. 一方, $m = 3$ のとき,

$$\begin{cases} a_1 = p + 4q \equiv p + q \pmod{3} \\ a_2 = p^2 - 4q^2 \equiv (p + q)(p - q) \pmod{3} \end{cases}$$

より, $p + q$ が 3 の倍数のとき, a_1, a_2 は 3 を公約数としてもつので, 以上のことから題意をみたす m は, $m = 3$ のみである.

$$\begin{aligned} (2) \quad a_n &= p^n - 4(-q)^n \\ &\equiv p^n - (-q)^n \pmod{3} \\ a_n &\equiv 0 \pmod{3} \text{より } p^n - (-q)^n \equiv 0 \pmod{3} \\ p^n - (-q)^n &= (p + q) \{ p^{n-1} + p^{n-2}(-q) + \cdots + (-q)^{n-1} \} \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

より, すべての n についてこれが成立するには $p + q \equiv 0 \pmod{3}$ となる.

$$(i) \quad q = 2 \text{ のとき, } p > 2q = 4 \quad \therefore p \geq 5$$

$$p = 5 \text{ のとき } \quad p + q = 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

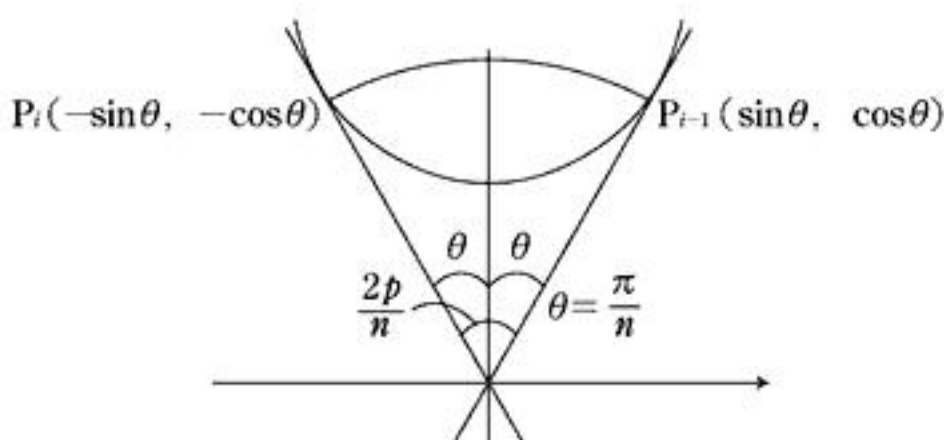
$$p = 7 \text{ のとき } \quad p + q = 9 \equiv 0 \pmod{3}$$

$\therefore$ このときは $(p, q) = (7, 2)$ のとき $pq = 14$ が最小となる.

$$(ii) \quad q > 3 \text{ のとき, } p > 2q \text{ より, } pq > 2q^2 > 18 \quad \therefore pq > 18$$

したがって, pq が最小となるような (p, q) は $(7, 2)$

- 3 直線 OP_{i-1} , OP_i , 放物線 C_i で囲まれる面積 S_i を求める.
座標軸を以下のように設定する.



C_i の軸の方式は原点を通る $(*)$ ので,

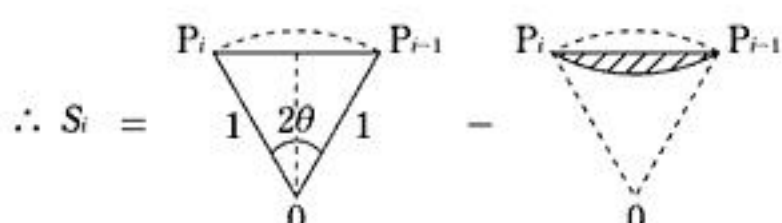
$$C_i: y = ax^2 + b$$

とおける.

C_i の P_{i-1} における接線の傾きは $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ より

$$y' = 2ax \text{ より}$$

$$2a \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$



$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (\sin \theta - (-\sin \theta))^3$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{6} \sin 2\theta = \frac{1}{6} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore S_n = nS_i = \frac{n}{6} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{2\pi}{6} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \quad \therefore \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{3}}$$

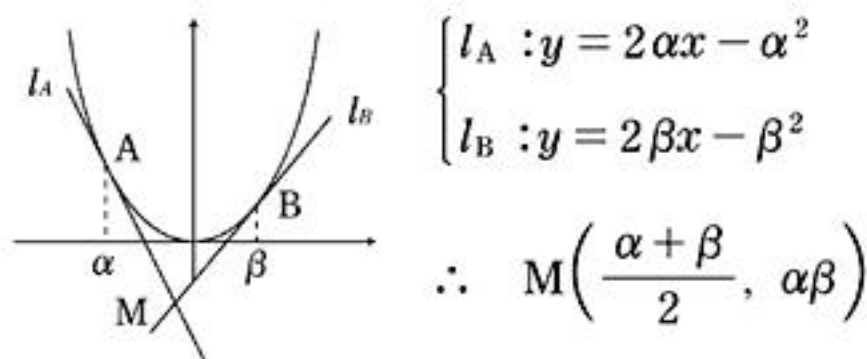
$(*)$ C_i の軸の方程式が原点を通ることの証明

これは $y = x^2$ 上に相異なる2点 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ をとったとき, A における接線 l_A と B における接線 l_B の交点を M としたとき

$$AM = BM \Rightarrow \alpha + \beta = 0$$

を示せば十分である.

まず M を出す. $y' = 2x$ より



$$\begin{cases} l_A: y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ l_B: y = 2\beta x - \beta^2 \end{cases}$$

$$\therefore M\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta\right)$$

$$\begin{aligned} MA^2 &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right)^2 + \left(\alpha\beta - \alpha^2\right)^2 \\ &= (\beta - \alpha)^2 \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MB^2 &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta\right)^2 + \left(\alpha\beta - \beta^2\right)^2 \\ &= (\beta - \alpha)^2 \left(\beta^2 + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore MA^2 = MB^2 \text{ より } (\beta - \alpha)^3(\alpha + \beta) = 0$$

$$\therefore \alpha \neq \beta \text{ より } \alpha + \beta = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = a & \dots \textcircled{1} \\ x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

(1) ②に $x_n = x_{n+1} = a$ とすると

$$a = ra(1-a) \quad \therefore \quad a(ra-r+1)=0$$

$$\therefore \quad \boxed{a=0 \quad \text{or} \quad a=\frac{r-1}{r} \quad (r \neq 0)}$$

(2) $b = x_2 = ra(1-a)$

$$b \neq a \text{ より } a - ra(1-a) \neq 0 \quad \therefore \quad a(ra-r+1) \neq 0 \dots \textcircled{3}$$

$$x_3 = a \text{ より } a = rb(1-b)$$

$$\iff$$

$$a(ra-r+1)\{r^2a^2 - (r^2+r)a + r+1\} = 0 \dots \textcircled{4}$$

③より $r^2a^2 - (r^2+r)a + r+1 = 0 \dots \textcircled{5}$ ③をみたすような

⑤の解が求める解となる.

$r=0$ のとき ④ $\iff a=0$ これは③に矛盾 $\therefore r \neq 0$

$r \neq 0$ のとき ⑤の判別式 D を計算すると

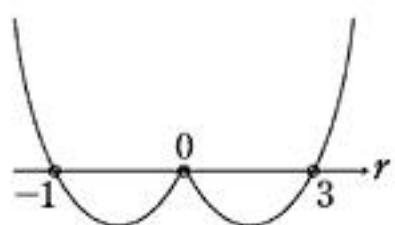
$$D = \{-(r^2+r)\}^2 - 4r^2(r+1)$$

$$= r^2(r+1)(r-3) = f(r)$$

ここで、 $r=-1$ のとき⑤ $\iff a^2=0$ となるので、 $r \neq -1$ となる.

$r=3$ のとき⑤ $\iff (3a-2)^2=0 \quad \therefore \quad a=\frac{2}{3}=\frac{r-1}{r}$ となり、 $r \neq 3$ となる.

$S=f(r)$ のグラフは下図のようになり、題意をみたす a の個数は、

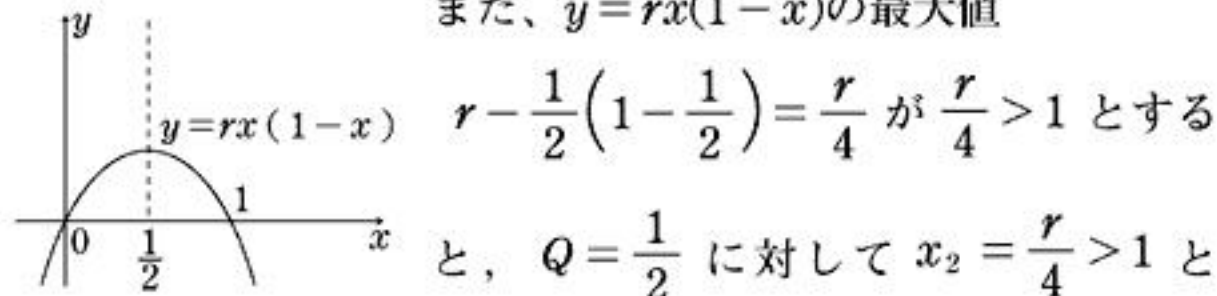


$$\begin{cases} 2\text{個} & (r < -1, 3 < r) \\ 0\text{個} & (-1 \leq r \leq 3) \end{cases}$$

となる.

(3) ②より $\{x_n\}$ はグラフ $y = rx(1-x)$ 上に存在することがわかる. $r < 0$ とすると、 $x_2 < 0$ となるので $r \geq 0$ としてよい.

また、 $y = rx(1-x)$ の最大値



$$r - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{4} \quad \text{が} \quad \frac{r}{4} > 1 \quad \text{とする}$$

$$\text{と, } Q = \frac{1}{2} \text{ に対して } x_2 = \frac{r}{4} > 1 \text{ と}$$

なり、不適. したがって $0 \leq r \leq 4$ という条件が必要になる.

さらに $0 \leq r \leq 4$ のとき、 $y = rx(1-x)$ は

$0 \leq x \leq 1$ における値域は $0 \leq y \leq 1$ となるので、

$0 \leq r \leq 4$ は十分条件となる.

したがって求める r の範囲は $\boxed{0 \leq r \leq 4}$