

III

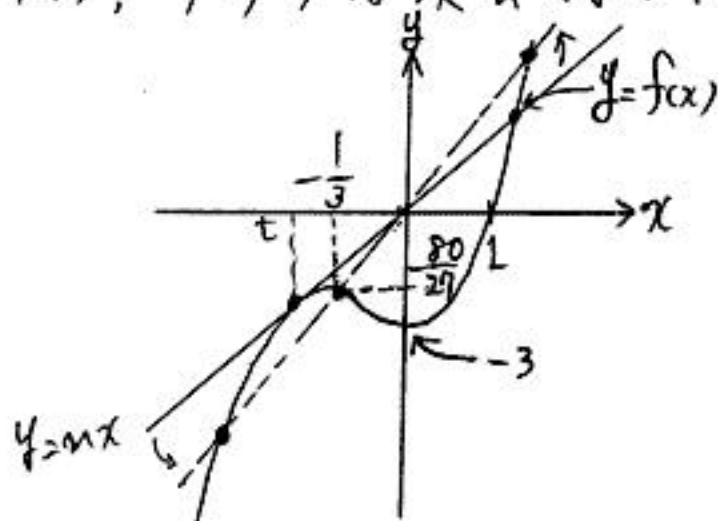
$$\begin{cases} f(x) = 2x^3 + x^2 - 3 \\ f'(x) = 6x^2 + 2x = 6x(x + \frac{1}{3}) \end{cases}$$

から、次の増減表を得る。

x	$-\frac{1}{3}$		0	
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	

$$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{80}{27}, \quad f(0) = -3$$

から、グラフは次の様になる。



$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線は

$$y = (6t^2 + 2t)(x - t) + 2t^3 + t^2 - 3 \quad \text{--- ①}$$

である。この接線が原点 $(0, 0)$ を通る直線 $y = m'x$ のとき、図の如くに $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = m'x$ の共有点は 2 点となるので、この値 m' も大きいとき、図の点線のように相異なる 3 点で交わる。

① が $(0, 0)$ を通るとき、

$$4t^3 + t^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(4t^2 - 3t + 3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ のとき, } m' = 6 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) = 4 \text{ となり,}$$

$$m > m' = 4 \quad (\text{答}).$$

のとき、相異なる 3 点で交わる。

[2]

$$S(n) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}, \quad T(n) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{n+q}$$

$S(n) = T(n)$ が任意の自然数 n について成り立つことを示す。

(i) $n=1$ のとき

$$S(1) = \sum_{p=1}^2 \frac{(-1)^{p-1}}{p} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$T(1) = \sum_{q=1}^1 \frac{1}{1+q} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S(1) = T(1)$$

(ii) $n=k$ のとき, $S(k) = T(k)$ が成り立つと仮定する。

$$\sum_{p=1}^{2k} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{q=1}^k \frac{1}{k+q} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \sum_{p=1}^{2(k+1)} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \\ &= \sum_{p=1}^{2k} \frac{(-1)^{p-1}}{p} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &= \sum_{q=1}^k \frac{1}{k+q} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}}_{\sum_{q=1}^k \frac{1}{(k+1)+q}} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \sum_{q=1}^k \frac{1}{(k+1)+q} + \frac{1}{2k+2} \\ &= \sum_{q=1}^{k+1} \frac{1}{(k+1)+q} \\ &= T(k+1) \end{aligned}$$

と成り立つ。数学的帰納法により、任意の自然数 n について $S(n) = T(n)$ が成り立つ。

△ABCは直角三角形。

442.

$\angle CAB = 60^\circ, AB = 1, AC = 2$ から $\triangle ABC$ は直角三角形。

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

また、点 C を α 平面上に正射影した点を C' とすると、

$$\angle BAC = \angle CAD \text{ かつ } \angle$$

$$\angle BAC' = \angle C'AD = 45^\circ$$

$$f, \gamma, C(1, 1, t) \ (t \geq 0) \in \mathcal{H}' \subset \mathcal{H},$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$$

o\4 $t = \sqrt{2}$.

$$\therefore C(1, 1, \sqrt{2})$$

点 $E(x, y, z) \in \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$,

$$AE = BE \text{ d.h. } x = \frac{1}{2}$$

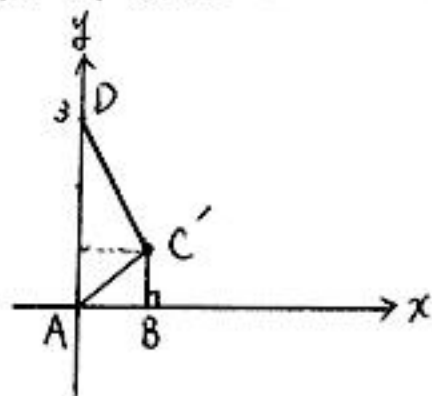
$$AE = DE \quad \text{p13} \quad y = \frac{3}{2}$$

$$AE = CE \text{ ①, ② p. 13}$$

$$Z = 0$$

$$\therefore AE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}$$



4

$$(1) \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } y = 1 - t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t = 0 \text{ より } t = \sqrt{2}.$$

$$\therefore x = 1$$

$$(2) \text{ i) } t \neq 0 \text{ のとき.}$$

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = 1 - t^2 + t \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{t} \\ \sin \theta = \frac{y + t^2 - 1}{t} \end{cases} (t \neq 0)$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y + t^2 - 1}{t}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + t^4 + 1 + 2t^2y - 2t^2 - 2y = t^2$$

$$\therefore t^4 + (2y - 3)t^2 + x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 = u \ (> 0) \text{ とおくと}$$

$$u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2 = 0 \quad \text{----- ①}$$

よって, $u > 0$ の解が存在するためには, ①の左辺を $f(u)$ とおくと

$$\begin{cases} \bullet (2y - 3)^2 - 4(x^2 + (y - 1)^2) \geq 0 & \text{----- ②} \\ \bullet f(0) \geq 0 & \text{----- ③} \\ \bullet f(u) = u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2 \text{ のグラフの頂点の} \\ \quad \text{u座標、} \frac{-2y + 3}{2} > 0 & \text{----- ④} \end{cases}$$

②より

$$-4x^2 - 4y + 5 \geq 0$$

$$\therefore y \leq -x^2 + \frac{5}{4}$$

----- ②'

③より

$$x^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

$\therefore x, y$ はすべての実数 --- ③'

④より

$$y < \frac{3}{2}$$

----- ④'

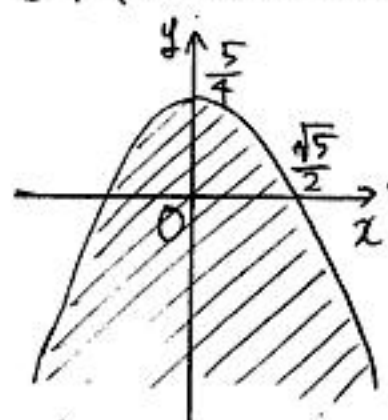
②'かつ③'かつ④'より

$$y \leq -x^2 + \frac{5}{4}$$

ii) $t = 0$ のとき

$$(x, y) = (0, 1)$$

(i)(ii) より, C を通過する範囲は



上図の斜線部分(境界含む)

(3) Qのx座標のとり得る値の範囲は, 題意(2)の図より

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ゆえに, 点 $Q(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ について,

$$\begin{cases} t \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} & \text{----- ⑤} \\ 1 - t^2 + t \sin \theta = 0 & \text{----- ⑥} \end{cases}$$

$$\text{⑤より, } 1 - \frac{5}{4 \cos^2 \theta} + t \cos \theta \cdot \tan \theta = 0 \quad (\because \text{⑤})$$

$$1 - \frac{5}{4} (1 + \tan^2 \theta) + \frac{\sqrt{5}}{2} \tan \theta = 0 \quad (\because \text{⑤})$$

$$(\sqrt{5} \tan \theta - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \begin{cases} y = t^n \\ y = a \log t \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y' = nt^{n-1} \\ y' = \frac{a}{t} \end{cases}$$

$$\text{より} \quad \begin{cases} t^n = a \log t \\ nt^{n-1} = \frac{a}{t} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} t = e^{\frac{1}{n}} \\ a = ne \end{cases}$$

$$(2) \quad S_1 = \int_0^t x^n dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{e^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}$$

$$S_2 = \int_1^t a \log x dx = a [x \log x - x]_1^t = me(t \log t - t + 1) \\ = me \cdot e^{\frac{1}{n}} (\log e^{\frac{1}{n}} - 1) + ne = (1-n)e^{\frac{n+1}{n}} + ne$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = n(n+1) \left(e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} - 1 \right) \quad \dots \text{①}$$

$$(3) (a) \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - (e^{-x} + x - 1) \quad x \geq 0$$

$$g'(x) = x + e^{-x} - 1$$

$$g''(x) = 1 - e^{-x}$$

$$x \geq 0 \text{ のとき } e^{-x} \leq 1 \quad \therefore g''(x) \geq 0$$

$$g'(0) = 0, \quad g''(x) \geq 0 \text{ のとき } g'(x) \geq 0$$

$$g(0) = 0, \quad g'(x) \geq 0 \text{ のとき } g(x) \geq 0$$

である。

$$\therefore e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

$$(b) \quad h(x) = e^{-x} + x - 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad x < 0$$

$$h'(x) = -e^{-x} + 1 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$h''(x) = e^{-x} + x - 1 = g'(x) \geq 0 \quad (\because (a))$$

$$h'(0) = 0, \quad h''(x) \geq 0 \text{ のとき } h'(x) \geq 0$$

$$h(0) = 0, \quad h'(x) \geq 0 \text{ のとき } h(x) \geq 0$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1$$

$$(4) (3) \text{ のとき}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2} \quad \dots \text{②}$$

$$(2) \text{ ① のとき } \frac{1}{n} = x \quad x \geq 0$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{1}{x} \right) (1+x) (e^{-x} + x - 1) \quad \dots \text{③}$$

②, ③ のとき

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{3} \right) (1+x) \leq \frac{S_2}{S_1} \leq \frac{1}{2} (1+x)$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$$