

第1問

$f(0) = a \geq 0$, $f(1) = 1 - 2a \geq 0$ が必要なので, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. 以下, そのもとで考える.

$f'(x) = 3(x^2 - a)$ より, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. $-\sqrt{a} < 0 \leq \sqrt{a} < 1$ より, $f(x)$ は下のように増減する (ただし, $a = 0$ のときは $\sqrt{a} = 0$).

x	0	$\sqrt{a}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって, $0 \leq x \leq 1$ での $f(x)$ の最小値は $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + a = a(1 - 2\sqrt{a})$ であり, 求める a の範囲は, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ かつ $a(1 - 2\sqrt{a}) \geq 0$, つまり $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$.

第2問

(1) $0 < \frac{1}{n+a} < 1$ より, $m < \log_2 6 < m+1$. ここで, $2^2 < 6 < 2^3$ より,
 $2 < \log_2 6 < 3$. よって, $m = 2$.

$$\frac{1}{n+a} = \log_2 6 - 2 = \log_2 \frac{3}{2} \text{ なので, } n+a = \frac{1}{\log_2(3/2)} = \log_{3/2} 2.$$

$$\frac{3}{2} < 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ なので, } n = 1.$$

$$(2) a = \log_{3/2} 2 - 1 = \log_{3/2} \frac{4}{3}. a > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{これは, } \frac{64}{27} > \frac{9}{4} \text{ つまり } \frac{256}{108} > \frac{243}{108} \text{ より成立する.}$$

第3問

条件より, $l: y = m(x - 1) + 2$ ($m \neq 0$) とおける.

これより, $P\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right)$, $Q(0, 2 - m)$ なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(1 - \frac{2}{m}, 0\right) + (0, 2 - m) - (1, 2) = \left(-\frac{2}{m}, -m\right).\end{aligned}$$

よって, R は曲線 $xy = 2$ 上にあるので, $f(x) = \frac{2}{x}$.