

①

$$y = x \sin^2 x = f(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y = x = g(x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

とおく。

(1) ①, ②を連立させて、

$$\begin{aligned} x \sin^2 x = x &\Leftrightarrow x(\sin^2 x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0, \sin x = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{aligned}$$

となるので、 $x > 0$ の範囲での解は小さい順に

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

となるので求める A_n の x 座標は、

$$\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi \quad \cdots \text{答}$$

$$f'(x) = \sin^2 x + 2x \sin x \cos x \quad \text{であり、}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi\right) \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi\right) + (2n-1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi\right) \right\}$$

$$= 1 \times (1 + 0) = 1$$

であり、また②は傾き 1 の直線なので、

①, ②が点 A_n で交わることで①, ②は点 A_n で接する。 $\cdots$ 証明終り

(2) 任意の実数 x で $g(x) - f(x) = x(1 - \sin^2 x) \geq 0$ が成立するので、

常に $g(x) \geq f(x)$ である。

また、(1)の結果とで右図のような概形となるので、

求める面積は、

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{として}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx$$

とかけ、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (x - x \sin^2 x) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - x \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x + x \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2} \left[x \times \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

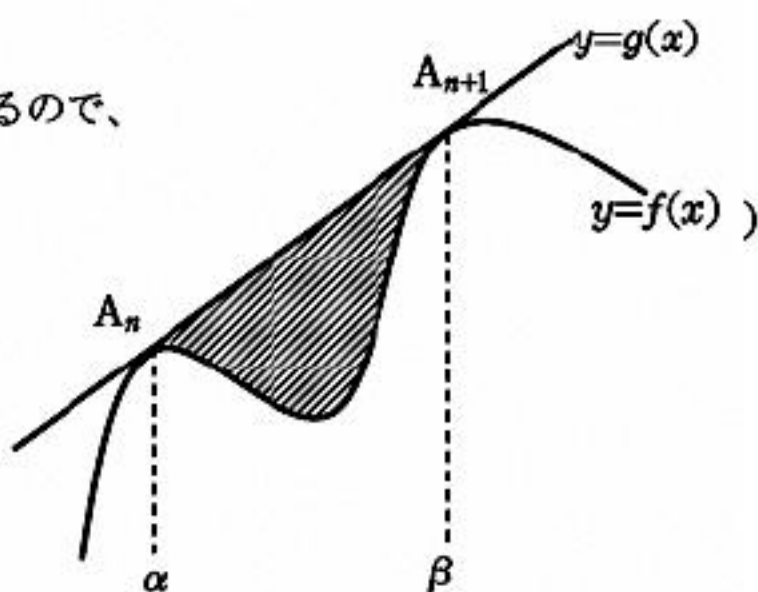
$$= \frac{1}{4} (\beta^2 - \alpha^2) + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\alpha}^{\beta} \quad \boxed{\text{※ } \sin 2\alpha = \sin 2\beta = 0 \text{ より}}$$

$$= \frac{1}{4} (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) + \frac{1}{8} (\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{4} (2n\pi) \times \pi + \frac{1}{8} \{ \underbrace{\cos(2n+1)\pi}_{[-1]} - \underbrace{\cos(2n-1)\pi}_{[-1]} \}$$

$$= \frac{n}{2} \pi^2$$

$\cdots$ 答



②

$a \neq \pm b$ である。

まず、平面全体を原点中心に -45° 回転させて考える。

すると、原点中心に -45° 回転を与える回転行列は、

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので、元の点 (a, b) 、二直線 $y = x$ 、 $y = -x$ はそれぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b \\ -a+b \end{pmatrix}, \quad x \text{ 軸}, y \text{ 軸} \quad \text{に対応する。}$$

回転後の点 A の座標を $A(c, d)$ とおきなす。

$cd \neq 0$ であり、点 $A(c, d)$ を通り傾き $n (\neq 0)$

の直線と x 軸、 y 軸との交点を求めると、

$$y = n(x - c) + d, \quad y = 0, \quad x = 0$$

から、

$$\left(c - \frac{d}{n}, 0 \right), \quad (0, -nc + d)$$

となり、これらは元の点 P, P' を回転した点に一致することから、新たに点 P, P' とおく。

そこで、元の点の位置関係と回転後の点の位置関係は変化しないことから、回転後の点において与えられたベクトル方程式を適用すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(c - \frac{d}{n} + 0 - c, 0 - nc + d - d \right) \\ &= \left(-\frac{d}{n}, -nc \right) \end{aligned}$$

となるが、 $Q(X, Y)$ とおくと

$$XY = \left(-\frac{d}{n} \right) (-nc) = cd \quad (\text{一定})$$

が成立するので、点 Q は x 軸、 y 軸を漸近線とする双曲線を描く。(直角双曲線)

よって元の位置でも同様に点 Q は $y = x$ 、 $y = -x$ を漸近線とする双曲線を描く。 …証明終り

※回転させずに l, l' を直交する 2 本の軸とする平面を考えて計算をおこなっても

同様。また次のように計算だけの解法も考えられる。

点 A を通る直線上の点を T とすると、(傾きを $\tan \theta$ として)

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + t(\cos \theta, \sin \theta) \quad \left(\theta \neq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \right)$$

とかけ、これが $y = x, y = -x$ 上にあるときの t の値を出すことで、

$$\text{それぞれ } t_P = \frac{b-a}{\cos \theta - \sin \theta}, \quad t_{P'} = -\frac{a+b}{\cos \theta + \sin \theta}$$

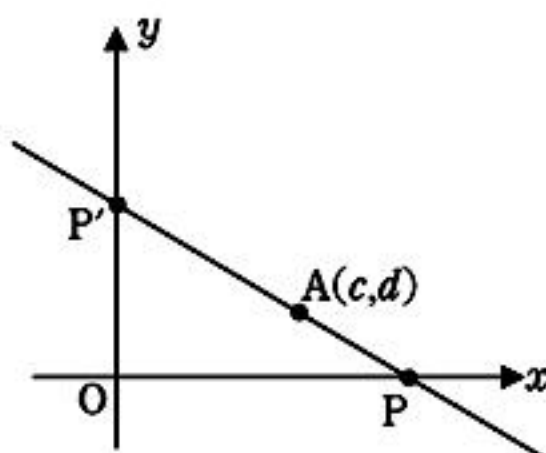
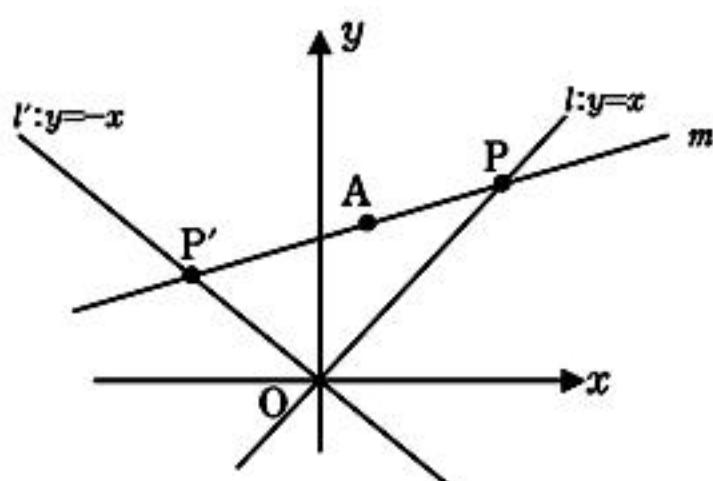
となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OA} + t_P(\cos \theta, \sin \theta) + \overrightarrow{OA} + t_{P'}(\cos \theta, \sin \theta) - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(b \tan 2\theta - \frac{a}{\cos 2\theta}, -a \tan 2\theta + \frac{b}{\cos 2\theta} \right) \end{aligned}$$

となり、 $Q(X, Y)$ とすると、

$$\begin{aligned} X^2 - Y^2 &= \left(b \tan 2\theta - \frac{a}{\cos 2\theta} \right)^2 + \left(-a \tan 2\theta + \frac{b}{\cos 2\theta} \right)^2 \\ &= a^2 - b^2 \quad (\text{もちろん } a \neq \pm b \text{ であるので } 0 \text{ でない定数}) \end{aligned}$$

からこれは $y = \pm x$ を漸近線とする双曲線上に点 Q が存在することを意味する。



③

$$(1) \frac{n+1}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、①の右辺を通分することで、

$$\textcircled{1} \text{の右辺} = \frac{a(y+n+1)+by}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)(y+n+1)}$$

となるから、

$$n+1=(a+b)y+a(n+1)$$

が y に関する恒等式となる条件を考えればよく、

$$a+b=1 \quad \text{かつ} \quad a=1$$

のとき、つまり

$$a=1, \quad b=-1$$

である。

…答

$$(2) \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_n C_r}{x+r} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が $n \geq 1$ で成立することを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき、

$$\textcircled{2} \text{の左辺} = \frac{1!}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\textcircled{2} \text{の右辺} = \sum_{r=0}^1 (-1)^r \frac{{}_1 C_r}{x+r} = (-1)^0 \frac{{}_1 C_0}{x+0} + (-1)^1 \frac{{}_1 C_1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

となるので②は成立する。

(ii) $n=k(k \geq 1)$ のとき、

$$\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)} = \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{{}_k C_r}{x+r} \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立すると仮定する。そこで、(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)(y+n+1)} \\ = \frac{1}{y(y+1)\cdots(y+n)} - \frac{1}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)} \end{aligned}$$

が成立するので、 $y=x$ とし、さらに両辺に $n!$ をかけることで

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(x+n+1)} \\ = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} - \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \end{aligned}$$

が成立する。これで $n=k$ とすることで、

$$\begin{aligned} & \frac{(k+1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k)(x+k+1)} \\ &= \frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)} - \frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)} \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{{}_k C_r}{x+r} - \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{{}_k C_r}{x+r+1} \\ & \quad (\text{仮定した③, および③で } x \rightarrow x+1 \text{ としたものより}) \\ &= (-1)^0 \frac{{}_k C_0}{x+0} + (-1)^1 \frac{{}_k C_1}{x+1} + (-1)^2 \frac{{}_k C_2}{x+2} + \cdots + (-1)^k \frac{{}_k C_k}{x+k} \\ & \quad - \left\{ (-1)^0 \frac{{}_k C_0}{x+1} + (-1)^1 \frac{{}_k C_1}{x+2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{{}_k C_{k-1}}{x+k} + (-1)^k \frac{{}_k C_k}{x+k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{x} + (-1)^1 \frac{{}_k C_1 + {}_k C_0}{x+1} + (-1)^2 \frac{{}_k C_2 + {}_k C_1}{x+2} + \cdots + (-1)^k \frac{{}_k C_k + {}_k C_{k-1}}{x+k} + \frac{(-1)^{k+1}}{x+k+1} \\ &= \frac{1}{x} + \underbrace{(-1)^1 \frac{{}_{k+1} C_1}{x+1} + (-1)^2 \frac{{}_{k+1} C_2}{x+2} + \cdots + (-1)^k \frac{{}_{k+1} C_k}{x+k}}_{+ \sum_{r=1}^k (-1)^r \frac{{}_{k+1} C_r}{x+r}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x+k+1} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \frac{{}_{k+1} C_r}{x+r} + \frac{(-1)^{k+1}}{x+k+1} \\ &= (-1)^0 \frac{{}_{k+1} C_0}{x+0} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \frac{{}_{k+1} C_r}{x+r} + (-1)^{k+1} \frac{{}_{k+1} C_{k+1}}{x+k+1} \\ &= \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \frac{{}_{k+1} C_r}{x+r} \end{aligned}$$

となり、これは②が $n=k+1$ でも成立することを意味する。

以上より数学的帰納法から任意の自然数 n で②の成立が示せた。

…証明終り

※②を具体的な n の値でばらしてみると、次のように部分分数分解の連続であると分かる。

$n=2$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{2!}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

$n=3$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{3!}{x(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right) - \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+3} \quad \text{など。} \end{aligned}$$

④

右図において、

$$\vec{OP} = a\vec{OA}, \vec{OQ} = b\vec{OB} \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

が成立している。

$$\text{まず、} \vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} \text{ であり、}$$

直線 OG と直線 PQ の交点を R とすると
3 点 O, G, R は同一直線上にあることから

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= k\vec{OG} \\ &= \frac{k}{3}\vec{OA} + \frac{k}{3}\vec{OB} \end{aligned}$$

とかける。さらに点 R が線分 PQ 上(両端を除く)にあるので、

$$\vec{OA} = \frac{1}{a}\vec{OP}, \vec{OB} = \frac{1}{b}\vec{OQ} \text{ から}$$

$$\vec{OR} = \frac{k}{3} \times \frac{1}{a}\vec{OP} + \frac{k}{3} \times \frac{1}{b}\vec{OQ}$$

について

$$\frac{k}{3a} + \frac{k}{3b} = 1, \quad \frac{k}{3a} > 0, \quad \frac{k}{3b} > 0$$

が成立。これを変形して、 $k = \frac{3ab}{a+b}$ となる。($a > 0, b > 0$ のとき後ろの不等式は成立する)

そこで、点 G が $\triangle OPQ$ の内部にあるとき、

$$k > 1$$

が成立することから、 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ …① の条件のもとで、

$$\frac{3ab}{a+b} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3ab > a+b$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) > \frac{1}{9} \quad \dots \textcircled{2}$$

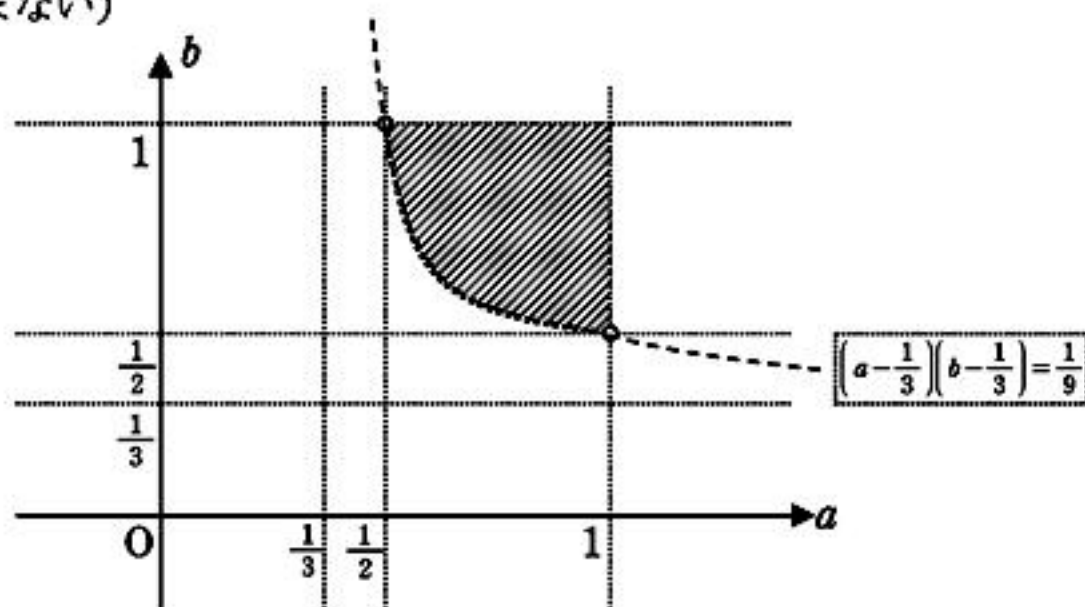
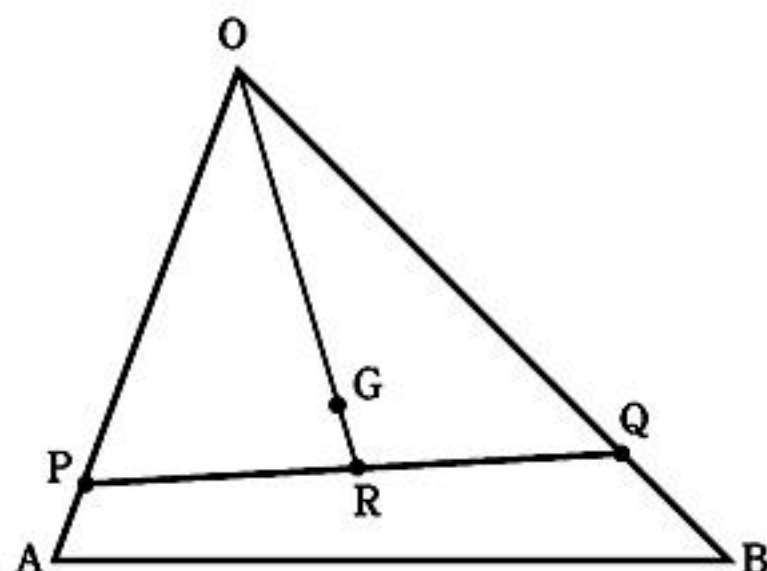
が成立する。

…答

よって①, ②を ab 平面に図示すると、

右図の斜線部分(境界を含まない)

となる。



5

- (1) 右図のようにベースとなる図形 ABCD を CD, AD に関して順次折り返し、さらに点 D に関して ABCD を 180° 回転した下のような図形を考えると、条件の PQ, PR, RS は一直線に伸びるようにかける。すると図において、

$$PC=1-t \text{ から } PB=2-t$$

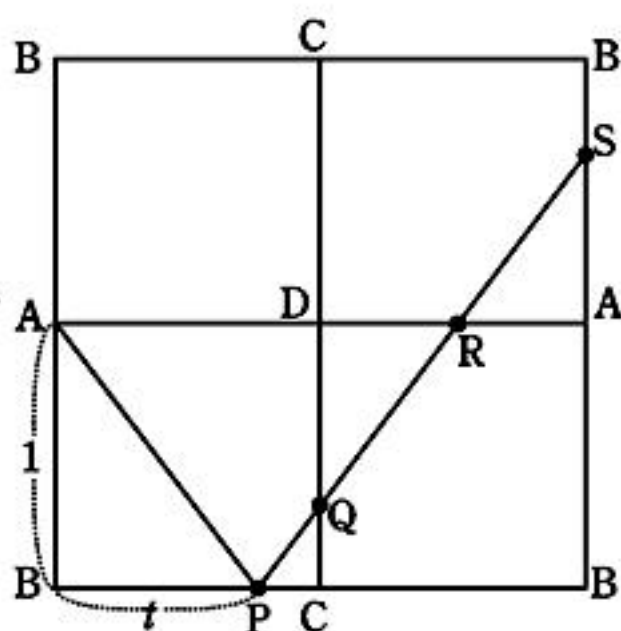
であり、 $\triangle APB \sim \triangle SPB$ であるから、

$$BS=(2-t) \times \frac{1}{t}$$

となる。今、点 S が線分 AB 上にあればよいので、

$$1 < \frac{2-t}{t} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} < t < 1 \quad \dots \text{答}$$



- (2) (1)の t の範囲では右のような図となり、

また $\triangle APB \sim \triangle QPC \sim \triangle QRD \sim \triangle SRA$ となることから、

$$BP=t \text{ より、}$$

$$PC=1-t,$$

$$CQ=\frac{1-t}{t},$$

$$QD=\frac{2t-1}{t},$$

$$DR=2t-1,$$

$$AR=2-2t,$$

$$AS=\frac{2-2t}{t}$$

となる。よって求める面積は、

$$f(t) = (\text{四角形 } ABCD) - (\triangle ABP + \triangle QPC + \triangle QRD + \triangle TAR)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left\{ t + (1-t) \frac{1-t}{t} + (2t-1) \frac{2t-1}{t} + (1-t) \frac{1-t}{t} \right\}$$

$$(\text{TA}=\text{TS}=\text{TR} \text{ より } \triangle TAR = \frac{1}{2} \triangle SAR)$$

$$= 6 - 4t - \frac{2}{t}$$

$$= 6 - \left(4t + \frac{2}{t} \right) \quad \text{となり、相加平均、相乗平均の関係から}$$

$$f(t) \leq 6 - 2\sqrt{4t \times \frac{2}{t}} \quad (\text{等号の成立は } t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき})$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}$$

が成立するので、面積は $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $6 - 4\sqrt{2}$ をとる。 $\dots$ 答

