

平成 18 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄(計 10 か所)に正確に記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答(途中の計算、推論等を含む)は、解答用紙の指定されたところに記入すること。指定された場所以外に記入してはいけない。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること。

(下 書 き 用 紙)

(下 書 き 用 紙)

1 曲線 $y = x \sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち、 x 座標が正のものを、 x 座標が小さいものから順に $A_1, A_2, A_3, \dots$ とし、第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ。また、点 A_n において、曲線 $y = x \sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。

(2) 線分 $A_n A_{n+1}$ と曲線 $y = x \sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

(配点率 20 %)

2 直線 $y = x$ を l で、直線 $y = -x$ を l' で表す。直線 l, l' のどちらの上にもない点 $A(a, b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l, l' とそれぞれ点 P, P' で交わるとする。点 Q を

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$$

を満たすようにとる。ただし、 O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき、点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

(配点率 20 %)

(下 書 き 用 紙)

3 x, y を変数とする.

(1) n を自然数とする. 次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ.

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} \\ = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_n C_r}{x+r}$$

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

- 4 三角形 OAB の辺 OA, OB 上に, それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{OP} = a \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = b \overrightarrow{OB} \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

とする. 三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ. また, その条件を満たす点 (a, b) はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ. ただし, 三角形 OPQ の辺上の点は, 三角形 OPQ の内部に含まれないと考える.

(配点率 20 %)

(下 書 き 用 紙)

- 5** 一辺の長さが1の正方形ABCDの辺BC, CD, DA, AB上に, それぞれ点P, Q, R, Sを

$$\angle APB = \angle QPC, \angle PQC = \angle RQD, \angle QRD = \angle SRA$$

となるようにとる. ただし, 点P, Q, R, Sは, どれも正方形ABCDの頂点とは一致しないものとする.

以下の問いに答えよ.

- (1) 線分BPの長さ t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 直線APと直線RSの交点をTとする. 四角形PQRTの面積を線分BPの長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す. $f(t)$ の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)