

①

$$C: y = x^2, \quad l: y = x + k$$

について、

(1) C と l が $-2 < x < 2$ の範囲で 2 点で交わる

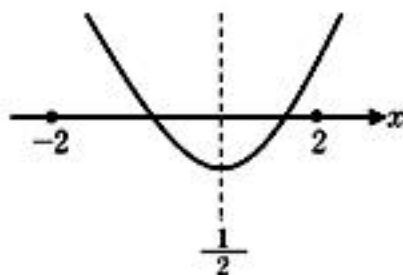
$\Leftrightarrow x^2 = x + k$ が $-2 < x < 2$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つ

$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - x - k$ が x 軸と $-2 < x < 2$ の範囲に異なる 2 つの交点を持つ
より、右のグラフと放物線の軸対称性から、

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - k$$

について、

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} - k < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < 2 \quad \cdots \text{答}$$



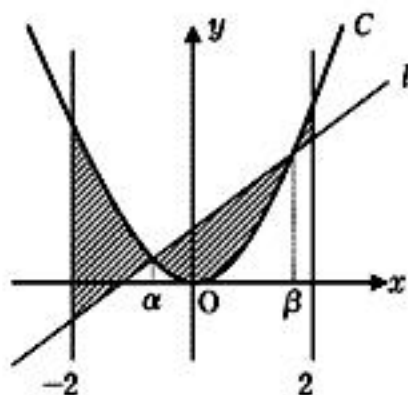
(2) $f(x) = 0$ を解いて、 $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$

よって $\alpha = \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{2}$, $\beta = \frac{1 + \sqrt{1+4k}}{2}$ として

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ と変形できる。

条件を満たす面積は、右のような図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\alpha} f(x) dx \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta} -f(x) dx \\ &\quad + \int_{\beta}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^2 f(x) dx \\ &\quad - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= \int_{-2}^2 f(x) dx - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^2 - x - k) dx - 2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - kx \right]_{-2}^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{16}{3} - 4k + \frac{1}{3} (1 + 4k)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



②

G : 1つのさいころを n 回投げ、第1回目から第 n 回目までに出現目の最大公約数

さいころを n 回投げたときに出る目は 6^n 通りあり、これらは全て同様に確からしい。

(1) $G=3$

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目の最大公約数が3

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目が3または6のみであるが、
 全て6であるものは除く

より、そのパターン数は $2^n - 1$ 通りある。よって求める確率は

$$\frac{2^n - 1}{6^n} \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1)と同様に $G=2, 4, 5, 6, 1$ となるパターン数を考えると、

$G=2$

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目の最大公約数が2

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目が2または4または6のみであるが、
 全て4または全て6であるものは除く

より、そのパターン数は $3^n - 2$ 通りある。

$G=4$

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目の最大公約数が4

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目が4のみ

より、そのパターン数は1通りある。

$G=5$

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目の最大公約数が5

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目が5のみ

より、そのパターン数は1通りある。

$G=6$

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目の最大公約数が6

⇔ 第1回目から第 n 回目までに出現目が6のみ

より、そのパターン数は1通りある。

$G=1$ となるパターン数は、

$6^n - (G=2, 3, 4, 5, 6 \text{ の場合のパターン数})$

$$= 6^n - \{(3^n - 2) + (2^n - 1) + 1 + 1 + 1\} = 6^n - 3^n - 2^n \text{ (通り)}$$

以上より求める G の期待値は、

$$\frac{1 \times (6^n - 3^n - 2^n) + 2 \times (3^n - 2) + 3 \times (2^n - 1) + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1}{6^n}$$

$$= \frac{6^n + 3^n + 2 \times 2^n + 8}{6^n} \quad \cdots \text{答}$$

※これは $n=1$ のとき $\frac{7}{2}$ となり、これは1回さいころを投げたときの出る目の期待値と一致する。

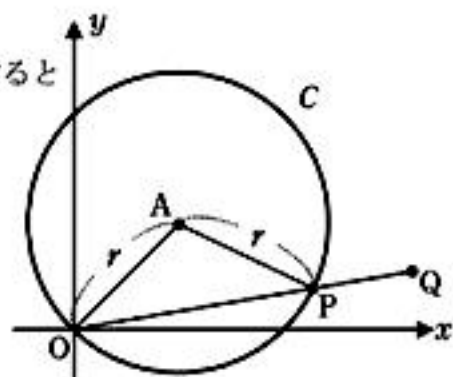
③

(1) 間の設定から、円 C の周上の点を P とすると

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = r \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = r \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。(右図は $|\overrightarrow{OP}| < 1$ のとき)



条件(a)から、 $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ を満たす正の実数 k が存在する。

すると条件(b)から、

$$|\overrightarrow{OP}| |k\overrightarrow{OP}| = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{|\overrightarrow{OP}|^2}$$

が成立するので $\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}|^2 \overrightarrow{OQ}$ を①へ代入することで、

$$||\overrightarrow{OP}|^2 \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}| = r$$

両辺を 2 乗することで、

$$|\overrightarrow{OP}|^4 |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2|\overrightarrow{OP}|^2 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OA}|^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}|^4 |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2|\overrightarrow{OP}|^2 \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} + r^2 = r^2 \quad (\textcircled{2} \text{より})$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}|^2 \{ |\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \} = 0$$

より $|\overrightarrow{OP}| \neq 0$ (条件(b)より), $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$ から、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}$$

となる。そこで $A(a_1, a_2)$, $Q(x, y)$ とすると、

$$a_1 x + a_2 y = \frac{1}{2} \quad (\text{法線ベクトルは } \vec{e} = (a_1, a_2))$$

となり、これは直線 OA に垂直な直線である。…証明終り

(2) 直線 $a_1 x + a_2 y = \frac{1}{2}$ と点 $A(a_1, a_2)$ の距離が r 未満であればよく、

$$\frac{|a_1^2 + a_2^2 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} < r \Leftrightarrow \frac{|r^2 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{r^2}} < r \quad (\textcircled{2} \text{より } a_1^2 + a_2^2 = r^2)$$

$$\Leftrightarrow \left| r^2 - \frac{1}{2} \right| < r^2$$

$$\Leftrightarrow -r^2 < r^2 - \frac{1}{2} < r^2$$

$$\Leftrightarrow r > \frac{1}{2} \quad (r > 0 \text{ より}) \quad \cdots \text{答}$$