

①

$$C: y = \sqrt{x}$$

l : 2点 $(n, \sqrt{n})$, $(n+1, \sqrt{n+1})$ を通る直線

について、

C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに
1回転させてできる回転体は、

上面の半径 $\sqrt{n}$, 底面の半径 $\sqrt{n+1}$
の円錐台の体積を V_1 として、

$$V = \pi \int_n^{n+1} (\sqrt{x})^2 dx - V_1$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_n^{n+1} - \frac{1}{3} \pi \{ (\sqrt{n})^2 + \sqrt{n} \sqrt{n+1} + (\sqrt{n+1})^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \{ (n+1)^2 - n^2 \} - \frac{1}{3} \pi (2n+1 + \sqrt{n(n+1)})$$

$$= \frac{1}{6} \pi (2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)})$$

となる。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi n^a (2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi n^a \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi \frac{n^a}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi \left(\frac{n^{\frac{a}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{2}}} \right)^2$$

について、

(i) $0 < a < 1$ のとき、 $1-a > 0$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi \left(\frac{1}{n^{\frac{1-a}{2}} + (n+1)^{\frac{1-a}{2}}} \right)^2$$

$$\text{は } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1-a}{2}} + (n+1)^{\frac{1-a}{2}} \right) = \infty \text{ より } 0 \text{ に収束する。}$$

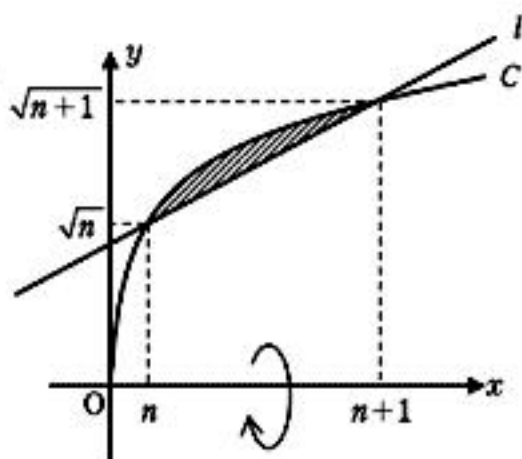
(ii) $a=1$ のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi \left(\frac{1}{1+1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{24} \pi \quad (\text{収束}) \end{aligned}$$

(iii) $a > 1$ のとき、 $a-1 > 0$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \pi \left(\frac{n^{\frac{a-1}{2}}}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \right)^2$$

$$\text{は } \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{a-1}{2}} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = 2 \quad \text{より発散する。}$$

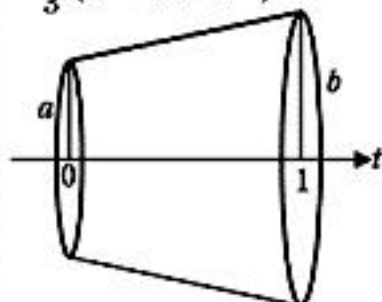


円錐台の体積は、回転体の体積として計算すると、

$$\int_0^1 \pi \{ a + (b-a)t \}^2 dt$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[\{ (b-a)t + a \}^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{3} (a^2 + ab + b^2)$$



以上から、 $a=1$, $b=\frac{\pi}{24}$ …答

[2]

(1) $x > 0$ のとき、 $|\log x| \leq \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示す。

(i) $x \geq 1$ のとき、 $\log x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ を示せばよいので

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} - \log x$ を考えると、

$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} \geq 0$ なので、関数 $f(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加関数。

よって、 $f(x) \geq f(1) = 0$ より不等式は成立する。

(ii) $0 < x < 1$ のとき、 $-\log x \leq -\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ を示せばよいので

$g(x) = \log x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ を考えると、

$g'(x) = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} < 0$ なので、関数 $g(x)$ は $0 < x < 1$ で単調減少関数。

よって、 $g(x) > g(1) = 0$ より不等式は成立する。

以上から与えられた不等式は成立する。(等号成立は $x=1$ のとき) …証明終り

(2) $p+q+r=1$ のとき、

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 - \frac{1}{3} &= p^2 + q^2 + r^2 - \frac{1}{3}(p+q+r)^2 \\ &= \frac{1}{3}(2p^2 + 2q^2 + 2r^2 - 2pq - 2qr - 2rp) \\ &= \frac{1}{3}\{(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

より $p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{3}$ は成立する。(等号成立は $p=q=r=\frac{1}{3}$ のとき) …証明終り

※対称性を無視して1文字消去でいくと、

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 - \frac{1}{3} &= p^2 + q^2 + (1-p-q)^2 - \frac{1}{3} \\ &= 2p^2 + 2(q-1)p + 2q^2 - 2q + \frac{2}{3} \\ &= 2\left(p + \frac{q-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(q - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

とできる。

(3) (1)の結果から、 $x > 0$ 、 $x \neq 1$ のとき

$$\left| \frac{\log x}{x-1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

が成立(この等号は成立しない)。これで $x = \frac{b}{a} (\neq 1)$ とすると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\log \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}-1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}} &\Leftrightarrow \left| \frac{a \log \frac{b}{a}}{b-a} \right| \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{ab \log \frac{b}{a}}{b-a} \right| \leq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

が成立する。一般に $x \leq |x|$ が成立するので、 $\frac{ab \log \frac{b}{a}}{b-a} \leq \sqrt{ab}$ も成立。同様に

$$\frac{bc \log \frac{c}{b}}{c-b} \leq \sqrt{bc}, \quad \frac{ca \log \frac{a}{c}}{a-c} \leq \sqrt{ca}$$

も成立するので、

$$\frac{ab \log \frac{b}{a}}{b-a} + \frac{bc \log \frac{c}{b}}{c-b} + \frac{ca \log \frac{a}{c}}{a-c} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

が成立。そこで、

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a+b+c)}{2}$$

について、今 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ なので(2)の結果から $a+b+c \geq \frac{1}{3}$ を満たすから

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a+b+c)}{2} = \frac{1 - (a+b+c)}{2} \leq \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

となる。以上から、

$$\frac{ab \log \frac{b}{a}}{b-a} + \frac{bc \log \frac{c}{b}}{c-b} + \frac{ca \log \frac{a}{c}}{a-c} \leq \frac{1}{3}$$

は成立する。 …証明終り

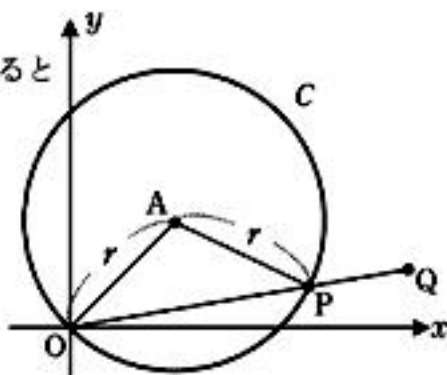
③

(1) 問の設定から、円 C の周上の点を P とすると

$$|\vec{OP} - \vec{OA}| = r \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{OA}| = r \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。(右図は $|\vec{OP}| < 1$ のとき)



条件(a)から、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ を満たす正の実数 k が存在する。

すると条件(b)から、

$$|\vec{OP}| |k\vec{OP}| = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{|\vec{OP}|^2}$$

が成立するので $\vec{OP} = |\vec{OP}|^2 \vec{OQ}$ を①へ代入することで、

$$||\vec{OP}|^2 \vec{OQ} - \vec{OA}| = r$$

両辺を 2 乗することで、

$$|\vec{OP}|^4 |\vec{OQ}|^2 - 2|\vec{OP}|^2 \vec{OA} \cdot \vec{OQ} + |\vec{OA}|^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{OP}|^4 |\vec{OQ}|^2 - 2|\vec{OP}|^2 \vec{OA} \cdot \vec{OQ} + r^2 = r^2 \quad (\textcircled{2} \text{より})$$

$$\Leftrightarrow |\vec{OP}|^2 \{ |\vec{OP}|^2 |\vec{OQ}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OQ} \} = 0$$

より $|\vec{OP}| \neq 0$ (条件(b)より), $|\vec{OP}| |\vec{OQ}| = 1$ から、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OQ} = \frac{1}{2}$$

となる。そこで $A(a_1, a_2)$, $Q(x, y)$ とすると、

$$a_1 x + a_2 y = \frac{1}{2} \quad (\text{法線ベクトルは } \vec{e} = (a_1, a_2))$$

となり、これは直線 OA に垂直な直線である。…証明終り

(2) 直線 $a_1 x + a_2 y = \frac{1}{2}$ と点 $A(a_1, a_2)$ の距離が r 未満であればよく、

$$\frac{|a_1^2 + a_2^2 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} < r \Leftrightarrow \frac{|r^2 - \frac{1}{2}|}{\sqrt{r^2}} < r \quad (\textcircled{2} \text{より } a_1^2 + a_2^2 = r^2)$$

$$\Leftrightarrow |r^2 - \frac{1}{2}| < r^2$$

$$\Leftrightarrow -r^2 < r^2 - \frac{1}{2} < r^2$$

$$\Leftrightarrow r > \frac{1}{2} \quad (r > 0 \text{ より}) \quad \cdots \text{答}$$

④

$$C_1: y = f(x) = x^3 - x$$

$$C_2: y = f(2t-x) = (2t-x)^3 - (2t-x)$$

について、

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標は、

$$x^3 - x = (2t-x)^3 - (2t-x)$$

の実数解であり、

$$2(x-t)(x^2 - 2tx + 4t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)\{(x-t)^2 + 3t^2 - 1\} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

から、 C_1 と C_2 が 3 点で交わるための条件は、

$$3t^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、①の解は

$$x = t, \quad t - \sqrt{1-3t^2} (= \alpha), \quad t + \sqrt{1-3t^2} (= \beta)$$

の 3 つである。よって右のような図から、面積を求める図形は $x = t$ に関して対称であるので

$$S = 2 \int_t^\beta -2\{(x-t)^3 + (3t^2 - 1)(x-t)\} dx$$

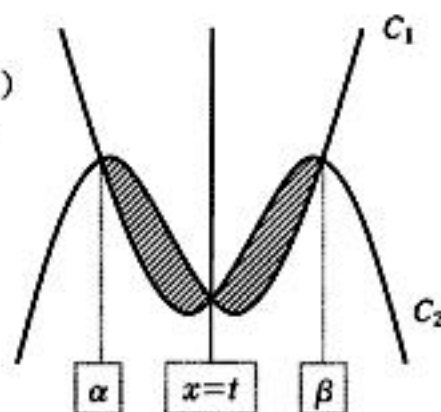
$$= -4 \left[\frac{1}{4} (x-t)^4 + \frac{3t^2 - 1}{2} (x-t)^2 \right]_t^\beta$$

$$= -(\beta - t)^4 + 2(1 - 3t^2)(\beta - t)^2$$

$$= -(1 - 3t^2)^2 + 2(1 - 3t^2)(1 - 3t^2)$$

$$= (1 - 3t^2)^2$$

となり、これは $t = 0$ のとき最大値 1 をとる。 $\cdots$ 答



⑤

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (2行2列の単位行列)}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (3行3列の単位行列)}$$

について、積が定義できるのは

※(左行列の列数)=(右行列の行数)
のとき積が定義できる。

$$AA = A, AB = B$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_1, BD = B$$

$$CA = C, CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdots F \text{ とする}$$

$$DC = C, DD = D$$

の8パターンである。また、 F については

$$FC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2, FD = F$$

より、積の結果が A, B, C, D, F, O_1, O_2 のみなので、積が定義できるのであれば $M_1 M_2 \cdots M_n$ の形もこれら7つのいずれかとなる。

(1) そこで、

A の右側には A, B のいずれか

B の右側には C, D のいずれか

C の右側には A, B のいずれか

D の右側には C, D のいずれか

をかけることで行列の積が定義できるので、1つ目が4パターン、2つ目以降は2パターンずつ考えられることから、

$$4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \text{ (通り)} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 零行列でない 2×3 行列となるのは、 M_n が B となる時のみ。よって、

B が出現する演算は $AB = B, BD = B$ のみであり、 $A^n = A, D^n = D$ であることから $M_n = AA \cdots ABDD \cdots D$ の形のときである(A, D は0個以上)。よって n 個の行列のうち B の位置を決定することで、 ${}_n C_1 = n$ (通り) $\cdots \text{答}$

(3) (2)と同様に考えることで、

$M_n = A$ となるのは $M_n = AA \cdots A$ のときの1通り

$M_n = B$ となるのは(2)より n 通り

$M_n = C$ となるのは

C が出現する演算 $DC = C, CA = C$

また $A^n = A, D^n = D$ であることから

$M_n = DD \cdots DCAA \cdots A$ のときの n 通り

$M_n = D$ となるのは $M_n = DD \cdots D$ のときの1通り

$M_n = F$ となるのは $CB = F$ であることと、

C が出現する演算 $DC = C, CA = C$

B が出現する演算 $AB = B, BD = B$

$A^n = A, D^n = D$ であることから

$M_n = DD \cdots DCAA \cdots ABDD \cdots D$ のときであり、

n 個から C, B の位置を決定することで、 ${}_n C_2 = \frac{1}{2} n(n-1)$ (通り)

以上から、

$$1 + n + n + 1 + \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 4}{2} \text{ (通り)} \quad \cdots \text{答}$$