

$$\text{①} \quad (1) \quad \text{条件より、}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = s, \quad |\overrightarrow{CD}| = t$$

を満たす。このとき、

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{MN}|^2 &= |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|^2 \\
 &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}|^2 \\
 &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}|^2 \\
 &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (s^2 + 2 \times s \times t \times \cos 60^\circ + t^2) \\
 &= \frac{1}{4} (s^2 + t^2 + st)
 \end{aligned}$$

から、

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{s^2 + t^2 + st}}{2} \quad \dots \text{答え}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |\overrightarrow{MN}| &= \frac{\sqrt{s^2 + t^2 + st}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{1 + st}}{2} \\
 &\leq \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}}{2} \quad \dots ※ \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

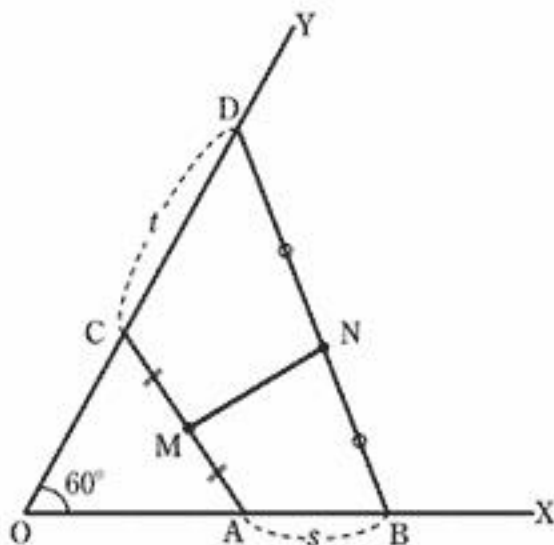
が成立する。

※は相加平均・相乗平均の関係から、

$$\frac{s^2 + t^2}{2} \geq \sqrt{s^2 t^2} = st \quad \Leftrightarrow \quad st \leq \frac{1}{2}$$

が成立し、等号成立条件から $s = t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときである。

以上より線分 MN の長さの最大値は、 $s = t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\frac{\sqrt{6}}{4}$ …答え



②

$$P(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

について、係数比較することで、

$$\alpha + \beta + \gamma = -3a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = -b \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。また条件より、 $\alpha + \gamma = 2\beta \quad \cdots \textcircled{4}$ を満たす。

(1) ①、④より、

$$2\beta + \beta = -3a \Leftrightarrow \beta = -a \quad \cdots \textcircled{5}$$

このとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \gamma + \alpha = -2a \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow (\gamma + \alpha)(-a) + \gamma\alpha = 3a \quad \cdots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow a\gamma\alpha = b \quad \cdots \textcircled{3}'$$

となるので、①'を②'へ代入して、

$$(-2a)(-a) + \gamma\alpha = 3a$$

$$\Leftrightarrow \gamma\alpha = 3a - 2a^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

これを③'へ代入して、

$$a(3a - 2a^2) = b$$

$$\Leftrightarrow b = -2a^3 + 3a^2 \quad \cdots \text{答え}$$

(2) ①の式の形から、

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ がすべて実数} \Leftrightarrow \gamma, \alpha \text{ がともに実数}$$

なので、 γ, α を解にもつ2次方程式

$$t^2 - (\gamma + \alpha)t + \gamma\alpha = 0$$

の判別式が0以上となればよい。よって、①'、④とで

$$(\gamma + \alpha)^2 - 4\gamma\alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2a)^2 - 4(3a - 2a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 12a(a - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq 0, 1 \leq a \quad \cdots \text{答え}$$

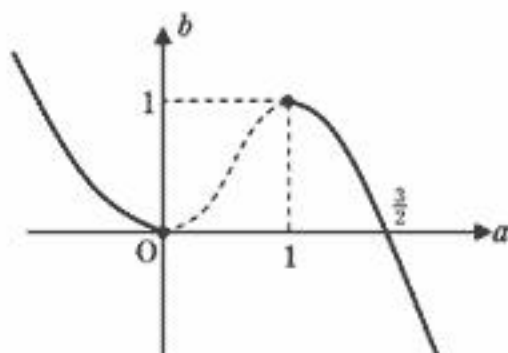
(3) a の関数 b を a で微分すると、

$$b' = -6a(a - 1)$$

より下のような増減となるから

グラフは右図の実線部分。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	
b	-		+		-
b'	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$



$$f(x) = ||x - 3a| - a|$$

$$g(x) = -x^2 + 6ax - 5a^2 + a, \quad a > 0$$

(1)

$x \leq 2a$ のとき、

$$f(x) = |(3a - x) - a| = |2a - x| = -x + 2a$$

$2a \leq x \leq 3a$ のとき、

$$f(x) = |(3a - x) - a| = |2a - x| = x - 2a$$

$3a \leq x \leq 4a$ のとき、

$$f(x) = |(x - 3a) - a| = |x - 4a| = -x + 4a$$

$4a \leq x$ のとき、

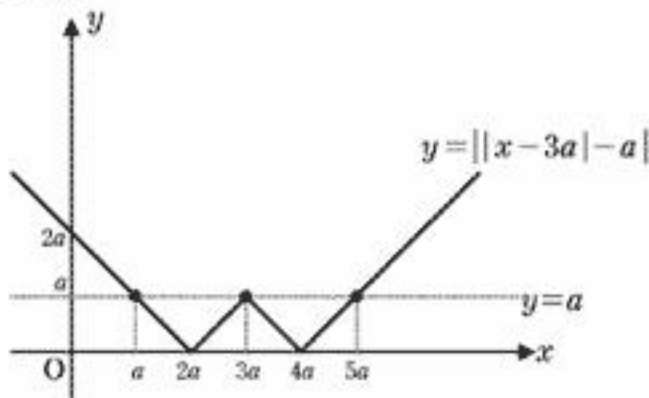
$$f(x) = |(x - 3a) - a| = |x - 4a| = x - 4a$$

以上より $y = f(x)$ のグラフは
右の通り。よって $f(x) = a$ の解は

$$y = f(x)$$

$$y = a$$

の交点の x 座標を見て、
 $x = a, 3a, 5a$ …答え



(2) 求める面積を S とすると、
図形の対称性より、

$$\frac{1}{2}S = \int_a^{3a} -(x^2 - 6ax + 5a^2 - a) dx - \left(\frac{1}{2} \times a \times a \right) \times 2$$

$$= - \left[\frac{1}{3}x^3 - 3ax^2 + (5a^2 - a)x \right]_a^{3a} - a^2$$

$$= \frac{16}{3}a^3 + a^2$$

よって、

$$S = \frac{32}{3}a^3 + 2a^2 \quad \dots \text{答え}$$

