

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) ①を繰り返し使って、

$$A_1 = B + A_0C = B$$

$$A_2 = B + A_1C = B + BC$$

$$A_3 = B + A_2C = B + (B + BC)C = B + BC + BC^2$$

となることから、 $n \geq 1$ で

$$A_n = B + BC + BC^2 + \dots + BC^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と推定できる。これが成立することを数学的帰納法にて示す。

$C^0 = E$ とする。

(i) $n=1$ のとき、 $A_1 = BC^0 = B$ より成立する。

(ii) $n=k$ ($k \geq 1$) のとき、

$$A_k = B + BC + BC^2 + \dots + BC^{k-1}$$

が成立すると仮定する。このとき①で $n=k+1$ として、

$$A_{k+1} = B + A_kC$$

$$= B + (B + BC + BC^2 + \dots + BC^{k-1})C$$

$$= B + BC + BC^2 + \dots + BC^{k-1} + BC^k$$

となるので②は $n=k+1$ でも成立。

以上から②は成立する。よって②の両辺に右から $E-C$ をかけて、

$$A_n(E-C) = (B + BC + BC^2 + \dots + BC^{n-1})(E-C)$$

$$= B - BC + BC - BC^2 + BC^2 - BC^3 + \dots + BC^{n-1} - BC^n$$

$$= B - BC^n \quad (\text{これは } n=0 \text{ でも成立する}) \quad \cdots \text{答え}$$

(2) (1)の結果より、

$$A_{3n}(E-C) = B - BC^{3n} \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たす。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ のとき、}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8E$$

より $C^{3n} = (-8)^n E$ であり、

$$E - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

から $\det(E-C) = 3 \neq 0$ より

$$(E-C)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

なので、③の両辺に右から $(E-C)^{-1}$ をかけて

$$A_{3n}(E-C)(E-C)^{-1} = (B - BC^{3n})(E-C)^{-1}$$

から、

$$A_{3n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-8)^n E \right\} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1 - (-8)^n}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{答え}$$

[2]

(1) 条件より、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = s, \quad |\overrightarrow{CD}| = t$$

を満たす。このとき、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}|^2 &= |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}|^2 \\ &= \frac{1}{4} (|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + |\overrightarrow{CD}|^2) \\ &= \frac{1}{4} (s^2 + 2 \times s \times t \times \cos 60^\circ + t^2) \\ &= \frac{1}{4} (s^2 + t^2 + st) \end{aligned}$$

から、

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{s^2 + t^2 + st}}{2} \quad \cdots \text{答え}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\overrightarrow{MN}| &= \frac{\sqrt{s^2 + t^2 + st}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + st}}{2} \\ &\leq \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}}{2} \quad \cdots ※ \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

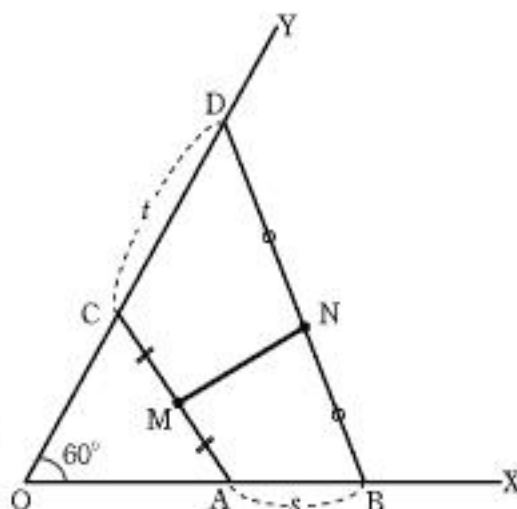
が成立する。

※は相加平均・相乗平均の関係から、

$$\frac{s^2 + t^2}{2} \geq \sqrt{s^2 t^2} = st \quad \Leftrightarrow \quad st \leq \frac{1}{2}$$

が成立し、等号成立条件から $s = t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときである。

以上より線分 MN の長さの最大値は、 $s = t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\frac{\sqrt{6}}{4}$ …答え



[3]

$f(x) = (N-x)\log x$ ($1 \leq x \leq N$) について、

$$(1) \quad f'(x) = \frac{N-x-x\log x}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{x+N}{x^2} < 0$$

より $y = f(x)$ のグラフは上に凸である。…証明終り

また $f'(x)$ は $1 \leq x \leq N$ で単調減少な連続関数であり、 $N \geq 2$ より、

$$f'(1) = N-1 > 0$$

$$f'(N) = -\log N < 0$$

とで中間値の定理より

$$f'(\alpha) = 0 \quad (1 < \alpha < N)$$

を満たす実数の定数 α が 1 つだけ存在する。よって関数 $f(x)$ の増減は下の表のようになる。

x	1	...	α	...	N
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	/		\	0

よって関数 $f(x)$ は $1 \leq x \leq N$ で極大値を 1 つだけとる。…証明終り

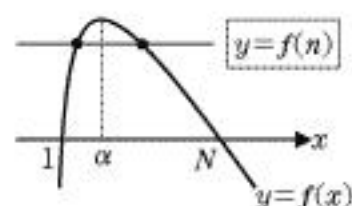
(2) $a_n = n^{N-n}$ ($n=1, 2, \dots, N$, $N \geq 2$) について、 $a_n > 0$ であり、

$$\log a_n = \log n^{N-n} = (N-n)\log n = f(n)$$

となるので $y = \log x$ は単調増加関数であることとて、

a_n が最大となる n 、 $\log a_n$ が最大となる n 、 $f(n)$ が最大となる n の個数と値は全て一致する。

そこで $f(n)$ の最大値を考えると、(1) の結果より関数 $f(x)$ は $1 \leq x \leq \alpha$ で増加、 $\alpha \leq x \leq N$ で減少する関数なので $y = f(x)$ と $y = f(n)$ の交点は高々 2 つである。従って、 $a_1, a_2, \dots, a_N$ のうち最大となるものの個数も高々 2 つなので



$$k \leq 2$$

となる。…証明終り

(3) (1) の α を使うことで $m \leq \alpha < m+1$ を満たす自然数 m ($1 \leq m \leq N-1$) が存在する。すると $f(n)$ の最大値について、

$$f(m) = f(m+1) = M$$

の形しかありえない。このとき、

$$a_m = a_{m+1}$$

$$\Leftrightarrow m^{N-m} = (m+1)^{N-(m+1)} \quad \dots \textcircled{1}, \quad 1 \leq N-m$$

を満たす自然数 m が存在するのであるが、①を変形して、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (m+1)m^{N-m} = (m+1)^{N-m}$$

$$\Leftrightarrow m+1 = \left(\frac{m+1}{m} \right)^{N-m}$$

について左辺は整数であり、 m と $m+1$ は互いに素なので右辺が整数となるのは

$$m=1 \quad \text{または} \quad N-m=0$$

のときのみ。しかし後者はありえない。よって $m=1$ のとき、

$$1+1 = \left(\frac{2}{1} \right)^{N-1}$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2^{N-1}$$

これは、

$$N-1=1 \Leftrightarrow N=2$$

のときのみ成立。以上より $k=2$ となるのは $N=2$ のときだけである。…証明終り

※ $m=1$, $N=2$ のとき、 $a_n = n^{2-n}$ ($n=1, 2$) について

$$a_1 = 1^{2-1} = 1, \quad a_2 = 2^{2-2} = 2^0 = 1 \text{ で一致するので、}$$

(この 2 数しかないが) 最大値である。

$$y = 2^{2x+2t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2^{x+3t} \quad \dots \textcircled{2}$$

(1) ①より、

$$y = 2^{2t} \cdot 2^{2x}$$

②より、

$$y = 2^{3t} \cdot 2^x$$

また

$$f(x) = 2^{2t} \cdot 2^{2x} - 2^{3t} \cdot 2^x = 2^{2t} \cdot 2^x (2^x - 2^t)$$

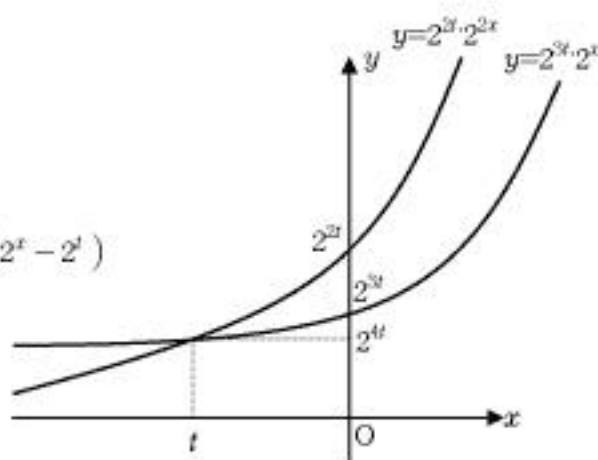
より、

$$x \leq t \text{ で } f(x) \leq 0$$

$$x \geq t \text{ で } f(x) \geq 0$$

なのでグラフは右図のようになる。

よって、



$$V(t) = \pi \int_t^0 \left\{ (2^{2t} \cdot 2^{2x})^2 - (2^{3t} \cdot 2^x)^2 \right\} dx$$

$$= \pi \int_t^0 (2^{4t} \cdot 2^{4x} - 2^{6t} \cdot 2^{2x}) dx$$

$$= \pi \cdot 2^{4t} \left[\frac{1}{4 \log 2} 2^{4x} \right]_t^0 - \pi \cdot 2^{6t} \left[\frac{1}{2 \log 2} 2^{2x} \right]_t^0$$

$$= \frac{\pi}{4 \log 2} (2^{8t} - 2^{6t+1} + 2^{4t}) \quad \dots \text{答え}$$

(2) $2^{2t} = X$ とおくと $t < 0$ なので $0 < X < 1$ であり、

$$V(t) = \frac{\pi}{4 \log 2} (X^4 - 2X^3 + X^2)$$

とかける。よって、

$$\frac{dV(t)}{dX} = \frac{\pi}{2 \log 2} X(2X-1)(X-1)$$

とで関数 $V(t)$ の増減は右のようになる。よって、

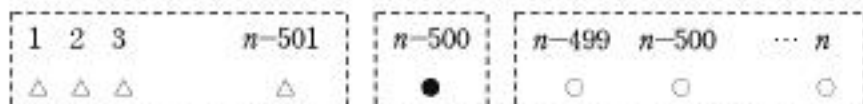
$V(t)$ は $X = \frac{1}{2}$ 、つまり $t = -\frac{1}{2}$ のとき

X	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$\frac{dV(t)}{dX}$	0	+	0	-	0
$V(t)$	(0)	↗		↘	(0)

最大値 $\frac{\pi}{64 \log 2}$ をとる … 答え

[5]

- (1) 確率 $P(n)$ は 1 枚の硬貨を繰り返し投げたとき、 $n-501 \leq 499$ なので
 1 回目から $n-501$ 回目までは何が出てもよく、
 $n-500$ 回目は裏であり、
 さらに $n-499$ 回目から n 回目まで連続で表が出る
 確率である。

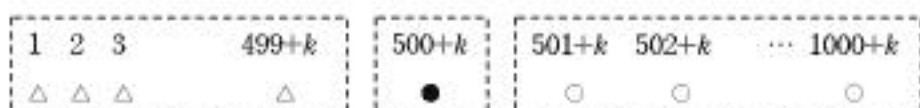


※ $\triangle$ 裏か表 $\bullet$ 裏 $\circ$ 表

よって $501 \leq n \leq 1000$ のとき、

$$P(n) = 1^{n-501} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{500} = \frac{1}{2^{501}} \quad \dots \text{答え}$$

- (2) $1 \leq k \leq 500$ のとき、確率 $P(1000+k)$ を考えると、
 1 回目から $499+k$ 回目までで表が 500 回以上連続して出ておらず、
 $500+k$ 回目は裏であり、
 さらに $501+k$ 回目から $1000+k$ 回目まで連続で表が出る
 確率である。



まずは硬貨を $499+k$ 回投げたとき表が連続して 500 回以上出ない確率を考える。

表が連続して 500 回以上出るパターン数を数えると、 $1 \leq k \leq 500$ のときは

『表が 500 回以上連続』する場所は 1箇所しかありえないので、

1 回目から連続がスタートするパターンが 2^{k-1} 通り

2 回目から連続がスタートするパターンが $2^0 \times 2^{k-2}$ 通り

3 回目から連続がスタートするパターンが $2^1 \times 2^{k-3}$ 通り

...

$k-1$ 回目から連続がスタートするパターンが $2^{k-3} \times 2^1$ 通り

k 回目から連続がスタートするパターンが 2^{k-2} 通り

あり、これらより余事象の確率(表が連続して 500 回以上出ることのない確率)を計算すると

$$1 - \frac{2^{k-1} + (k-1)2^{k-2}}{2^{499+k}} = \frac{2^{501} - k - 1}{2^{501}}$$

よって、

$$\begin{aligned} P(1000+k) &= \frac{2^{501} - k - 1}{2^{501}} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{500}} \\ &= \frac{2^{501} - k - 1}{2^{1002}} \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

とでる。よって $k=2, 1$ として、

$$\begin{aligned} P(1002) - P(1001) &= \frac{2^{501} - 2 - 1}{2^{1002}} - \frac{2^{501} - 1 - 1}{2^{1002}} \\ &= -\frac{1}{2^{1002}} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

- (3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき①で $k=n-999$, $n-1000$ として計算でき、

$$\begin{aligned} P(n+1) - P(n) &= \frac{2^{501} - (n-999) - 1}{2^{1002}} - \frac{2^{501} - (n-1000) - 1}{2^{1002}} \\ &= -\frac{1}{2^{1002}} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$

※①は k の 1 次式なので $P(1000+k)$ ($1 \leq k \leq 500$) は等差数列で

公差が $-\frac{1}{2^{1002}}$ になっている。よって(2)(3)の結果は明らかである。

別解

- (2)(3)は次のようにも考えられる。例えば $P(1300)$ であれば、

1 回目から 799 回目までで表が 500 回以上連続して出ておらず $\dots$ ※

800 回目は裏であり、

さらに 801 回目から 1300 回目まで連続で表が出る

確率である。よって、

$$P(1300) = \left\{ 1 - (P(500) + P(501) + \dots + P(799)) \right\} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{500}$$

の関係ができる。

※は 799 回目に終わっていない確率なので、
 『500 回目に終わる確率 + 501 回目に終わる確率 + $\dots$ + 799 回目に終わる確率』
 の余事象の確率である。(499 回以下では終わることがない)

一般化して、 $1001 \leq n \leq 1500$ で $P(n) = \left\{ 1 - \sum_{k=500}^{n-501} P(k) \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ の関係ができるので、

この n の範囲では

$$P(n+1) - P(n) = -P(n-500) \left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

の関係が成立。あとは $501 \leq n-500 \leq 1000$ なので(1)からこの範囲で $P(n-500)$ は

一定であることから、

$$P(n+1) - P(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{501} \left(\frac{1}{2}\right)^{501} = -\frac{1}{2^{1002}}$$

と出せる。