

平成 20 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、解答用紙の指定されたところに記入すること。指定された場所以外に記入してはいけない。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること。

1 2 次の方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. ただし, O は 2 次の方行列, B と C は 2 次の方行列とする.

(1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ. ここで E は 2 次の方行列とする.

(2) B と C を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, A_{3n} を求めよ.

(配点率 20 %)

2 点 O で交わる 2 つの方直線 OX, OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする. 2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に, また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M , 線分 BD の中点を N とする. 線分 AB の長さを s , 線分 CD の長さを t とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ.

(2) 点 A, B と C, D が, $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 線分 MN の長さの最大値を求めよ.

(配点率 20 %)

3

N を 2 以上の自然数とする.

- (1) 関数 $f(x) = (N - x) \log x$ を $1 \leq x \leq N$ の範囲で考える. このとき, 曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり, 関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる. このことを示せ.

- (2) 自然数の列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

で定める. $a_1, a_2, \dots, a_N$ のうちで最大の値を M とし, $M = a_n$ となる n の個数を k とする. このとき $k \leq 2$ であることを示せ.

- (3) (2) で $k = 2$ となるのは, N が 2 のときだけであることを示せ.

(配点率 20 %)

4

t を負の実数とし, xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と曲線 $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする.

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ.

(2) t が負の実数の範囲を動くとき, $V(t)$ の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)

5

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い、表が 500 回続けて出たときに終わるものとする. n を 500 以上の自然数とすると、この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする.

- (1) $501 \leq n \leq 1000$ のとき、 $p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し、またその値を求めよ.
- (2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ.
- (3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき、 $p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ.

(配点率 20 %)