

①

$C: y = x^3 - kx$ について

$y' = 3x^2 - k$ となる。

(1) 点 $A(a, a^3 - ka)$ における C の接線の方程式 l_1 は、

$$y = (3a^2 - k)(x - a) + a^3 - ka$$

$$\Leftrightarrow y = (3a^2 - k)x - 2a^3$$

よって、点 B の x 座標は、

$$x^3 - kx = (3a^2 - k)x - 2a^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

の実数解であるが、 $x \neq a$ であるから $x = -2a$ …答

(2) 点 B における C の接線 l_2 の傾きは、

$$3(-2a)^2 - k = 12a^2 - k$$

よって l_1 と l_2 が直交するのは、

$$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$$

を満たすときであるので、

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \quad \dots \text{答}$$

(3) (2)の結果で $a^2 = t$ とおくと $t > 0$ であり、

l_1 と l_2 が直交するような実数 a が存在

$$\Leftrightarrow 36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \text{ を満たす実数 } a \text{ が存在}$$

$$\Leftrightarrow 36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0 \text{ を満たす正の実数 } t \text{ が存在}$$

より、

$$36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0$$

について、この t の 2 次方程式の 2 解の積は $\frac{k^2 + 1}{36} > 0$ である

ので、

$$\begin{cases} (-15k)^2 - 4 \cdot 36(k^2 + 1) \geq 0 \\ \frac{15k}{36} > 0 \text{ (2解の和が正)} \end{cases}$$

を満たせばよい。よって、

$$\begin{cases} k \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq k \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq k \quad \dots \text{答}$$

[2]

$\angle AOB = \theta$, $|\vec{OA}| = a$, $|\vec{OB}| = b$ とする。

条件より、

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \frac{a}{2b}\vec{b} - \vec{a}$$

(1) $AD \perp OB$

$$\Leftrightarrow \vec{AD} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2b}b^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}ab$$

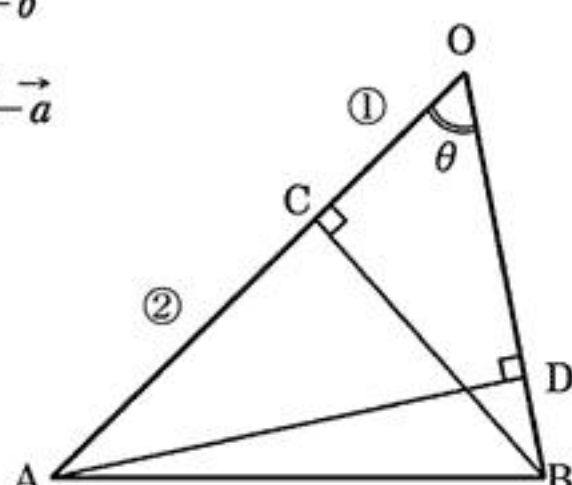
これより、

$$ab \cos \theta = \frac{1}{2}ab$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

よって、

$$\angle AOB = \theta = 60^\circ \quad \dots \text{答}$$



(2) $BC \perp OA$

$$\Leftrightarrow \vec{BC} \cdot \vec{OA} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow ab \cos 60^\circ = \frac{1}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

よって、

$$t = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \quad \dots \text{答}$$

(3) $AP : PD = x : 1 - x$

$$BP : PC = y : 1 - y$$

とおくと、

$$\vec{OP} = (1 - x)\vec{OA} + x\vec{OD} = (1 - x)\vec{a} + \frac{3}{4}x\vec{b}$$

$$\vec{OP} = y\vec{OC} + (1 - y)\vec{OB} = \frac{1}{3}y\vec{a} + (1 - y)\vec{b}$$

とかけるので、 $\vec{OP}$ を消去して、

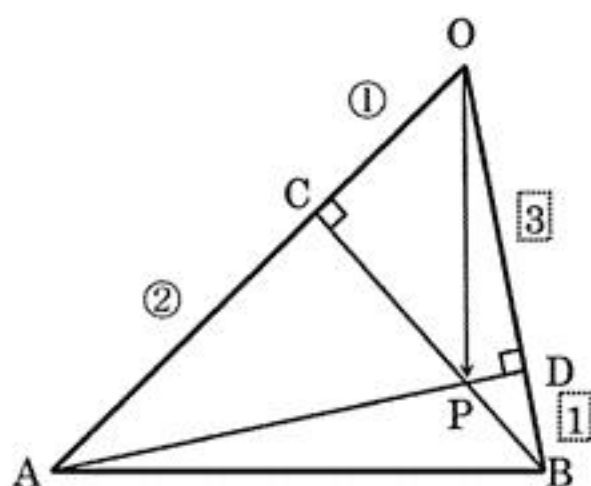
$$(1 - x)\vec{a} + \frac{3}{4}x\vec{b} = \frac{1}{3}y\vec{a} + (1 - y)\vec{b}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{cases} 1 - x = \frac{1}{3}y \\ \frac{3}{4}x = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{9} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

となる。よって、

$$\vec{OP} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \quad \dots \text{答}$$



③

(1) p_k : k 回の移動で $(0, 0) \rightarrow (2, 1)$ と移動する確率について、

p_1 : 1回の移動で $(0, 0) \rightarrow (2, 1)$ と移動する確率

p_2 : 2回の移動で $(0, 0) \rightarrow (2, 1)$ と移動する確率

これらはともに移動回数が少ない為、不可能であるから、

$$p_1 = p_2 = 0 \quad \cdots \text{答}$$

p_3 : 3回の移動で $(0, 0) \rightarrow (2, 1)$ と移動する確率

について、これは3回中

2回は1または2または3の目

1回は4の目

が出たときのみ可能。よって、

$$p_3 = {}_3C_2 \left(\frac{3}{6} \right)^2 a^1 = \frac{3}{4} a \quad \cdots \text{答}$$

(2) p_6 : 6回の移動で $(0, 0) \rightarrow (2, 1)$ と移動する確率

について、6回中

l 回1または2または3の目

m 回4の目

n 回5または6の目

が出たときを考えると、 $0 \leq l, m, n \leq 6$, $l + m + n = 6$ を満たし、移動する点は、

$$(0, 0) \rightarrow (l - n, m - n)$$

となるから、移動した点が $(2, 1)$ となるとき、

$$l - n = 2, \quad m - n = 1$$

$$\Leftrightarrow l = n + 2, \quad m = n + 1$$

より、

$$0 \leq n + 2 \leq 6, \quad 0 \leq n + 1 \leq 6, \quad 0 \leq n \leq 6$$

$$(n + 2) + (n + 1) + n = 6$$

を解いて、 $n = 1$ となる。よって、

$$p_6 = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{3}{6} \right)^3 a^2 \left(\frac{1}{2} - a \right)^1 = \frac{15}{4} a^2 (1 - 2a) \quad \cdots \text{答}$$

(3) $f(a) = a^2(1 - 2a)$ とおくと、

$$f'(a) = 2a(1 - 3a)$$

a	0	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗		↘	

関数 $f(a)$ の増減は上の表のようになる。

よって $f(a)$ は $a = \frac{1}{3}$ で極大かつ最大となり、このとき p_6 も最大となる。 $\cdots$ 答