

①

(1) $f(x) = x^2$ は任意の区間で微分可能(つまり連続でもある)であるから、平均値の定理より、

$$\frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{a_{k+1} - a_k} = f'(a_{k+2})$$

を満たす a_{k+2} が a_{k+1} と a_k の間に存在する。また $f'(x) = 2x$ より、 $f'(x)$ は増加関数であるから、そのような a_{k+2} は唯一つ存在する。よって、

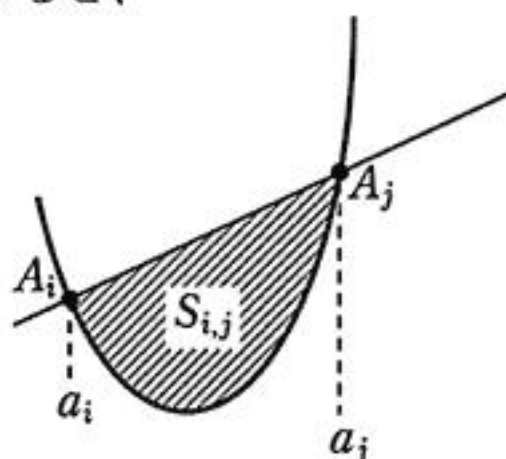
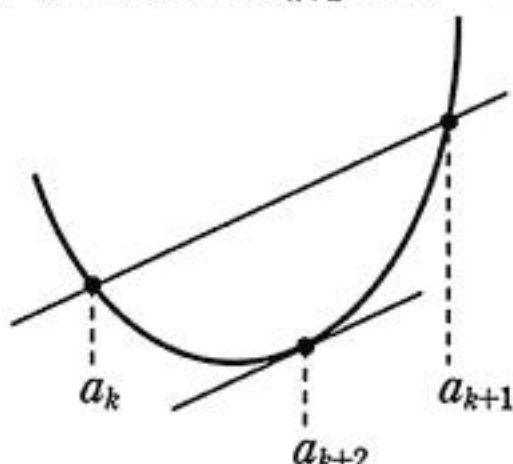
$$a_{k+1} + a_k = 2a_{k+2}$$

が成立。

次に直線 $A_i A_j$ と放物線 C とで囲まれる部分の面積を $S_{i,j}$ 、

直線 $A_i A_j$ の方程式を $y = p_{i,j}x + q_{i,j}$ とすると、

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= \left| \int_{a_i}^{a_j} (p_{i,j}x + q_{i,j} - x^2) dx \right| \\ &= \left| -\int_{a_i}^{a_j} (x - a_i)(x - a_j) dx \right| \\ &= \frac{1}{6} |a_j - a_i|^3 \end{aligned}$$

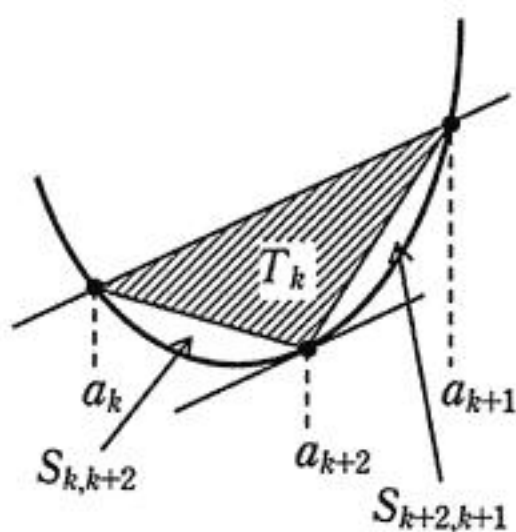


となるので、 $S = S_{1,2} = \frac{1}{6} (a_2 - a_1)^3$ である。また、

$$\begin{aligned} T_k &= S_{k,k+1} - (S_{k,k+2} + S_{k+2,k+1}) \\ &= \frac{1}{6} \{ |a_{k+1} - a_k|^3 - |a_{k+2} - a_k|^3 - |a_{k+1} - a_{k+2}|^3 \} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ |a_{k+1} - a_k|^3 - \left| \frac{a_{k+1} + a_k}{2} - a_k \right|^3 - \left| a_{k+1} - \frac{a_{k+1} + a_k}{2} \right|^3 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ |a_{k+1} - a_k|^3 - \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{2} \right|^3 - \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{2} \right|^3 \right\} \\ &= \frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{T_{k+1}}{T_k} &= \frac{\frac{1}{8} |a_{k+2} - a_{k+1}|^3}{\frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3} \\ &= \frac{\left| \frac{a_{k+1} + a_k}{2} - a_{k+1} \right|^3}{|a_{k+1} - a_k|^3} \\ &= \frac{\frac{1}{8} |a_{k+1} - a_k|^3}{|a_{k+1} - a_k|^3} \\ &= \frac{1}{8} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$



(2) (1)の結果より数列 $\{T_k\}$ は公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列。よって、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k$ は収束する無限等比級数の和であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k &= \frac{T_1}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{8}{7} \times \frac{3}{4} S \quad \left(T_1 = \frac{1}{8} (a_2 - a_1)^3 \text{ より} \right) \\ &= \frac{6}{7} S \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

[2]

$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおくと、これは回転行列であり、

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} R\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

なので変換 f は原点中心に $\frac{1}{2}$ 倍の相似拡大と $\frac{\pi}{3}$ の回転を与える一次変換である。

また、領域 D_k は第 3 象限のみに属する領域であるから、第 3 象限に属する P_n のみをカウントの対象とすればよい。

$$P(16\sqrt{3}, 16) = P\left(32\cos\frac{\pi}{6}, 32\sin\frac{\pi}{6}\right) \text{ であるから、}$$

l, m を 1 以上の自然数として、

$$A^l = \left(\frac{1}{2}\right)^l R\left(\frac{l\pi}{3}\right)$$

とで、点 P_l が第 3 象限の点であるのは、

$$\pi + 2(m-1)\pi < \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3} < \frac{3}{2}\pi + 2(m-1)\pi$$

$$\Leftrightarrow 6m - 3 - \frac{1}{2} < l < 6m - 2$$

を満たすときなので、

$$l = 6m - 3$$

のときのみ考えれば十分である。

$$\begin{aligned} A^{6m-3} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{6m-3} R\left(\frac{(6m-3)\pi}{3}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-3} \end{aligned}$$

なので、 P_{6m-3} の座標は、

$$\begin{aligned} &\left(-16\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-3}, -16\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-3}\right) \\ &= \left(-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-7}, -\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-7}\right) \end{aligned}$$

だから、この点が領域 D_k に属するとき、

$$\sqrt{3}\left\{-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-7}\right\} + \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-7}\right\} \leq -2^{-k}$$

$$\Leftrightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^{6m-7} \leq -\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

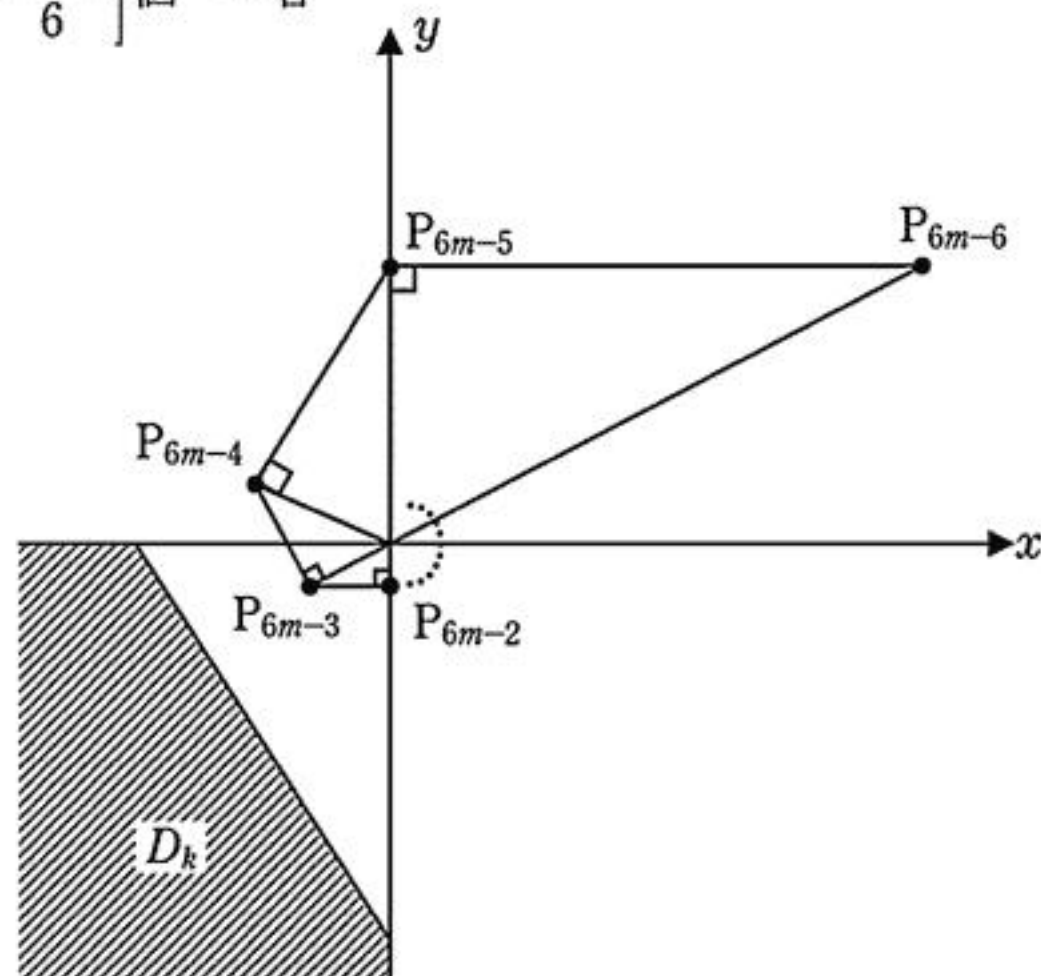
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6m-9} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\Leftrightarrow 6m - 9 \leq k$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{k+9}{6}$$

よって、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すことで、

$$\left[\frac{k+9}{6}\right] \text{ 個} \quad \dots \text{答}$$



③

α は $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解なので、 $1 \pm \sqrt{2}$ のいずれかで、無理数である上、 $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ を満たす。このとき、

$$(a + 5\alpha)(b + 5c\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow ab + 5(ac + b)\alpha + 25c\alpha^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow ab + 5(ac + b)\alpha + 25c(2\alpha + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 5(ac + b + 10c)\alpha = 1 - ab - 25c$$

について、 $ac + b + 10c \neq 0$ とすると、

$$\alpha = \frac{1 - ab - 25c}{5(ac + b + 10c)} \quad (\text{無理数} = \text{有理数})$$

となり矛盾するので、

$$\begin{cases} ac + b + 10c = 0 \cdots \textcircled{1} \\ 1 - ab - 25c = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する。①から、

$$b = -ac - 10c$$

これを②へ代入して、

$$1 - a(-ac - 10c) - 25c = 0$$

$$\Leftrightarrow c(25 - 10a - a^2) = 1$$

a, c は整数であるから、

$$(i) \quad c = 1, \quad 25 - 10a - a^2 = 1$$

$$(ii) \quad c = -1, \quad 25 - 10a - a^2 = -1$$

のいずれかが成立する。

(i) のとき、

$$a^2 + 10a - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 12)(a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -12, \quad 2$$

$$a = -12 \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ より } b = 2$$

$$a = 2 \text{ のとき、} \textcircled{1} \text{ より } b = -12$$

(ii) のとき、

$$a^2 + 10a - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -5 \pm \sqrt{51}$$

これは a が整数であることに反する。

以上より、

$$(a, b, c) = (-12, 2, 1), (2, -12, 1) \quad \cdots \text{答}$$

※ $c(25 - 10a - a^2) = 1$ の式は、

$$c = -\frac{1}{a^2 + 10a - 25} \quad (\neq 0)$$

と変形することで、 c が整数となるための必要条件である

$$|a^2 + 10a - 25| \leq 1$$

から $a = -12, 2$ を捻出することもできる。

④

(1) $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= (s-1)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} \\ &= \left(s - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と書ける。 $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $\angle AOB = \theta (0 < \theta < \pi)$ とす

ると、条件から

$$OQ \perp AQ$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) \cdot \{(s-1)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\} = 0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow s(s-1)|\overrightarrow{OA}|^2 + \{st + (s-1)t\}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ + t^2|\overrightarrow{OB}|^2 = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow s(s-1)a^2 + t(2s-1)ab\cos\theta + t^2b^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

より、 $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を C とすると、

$$OC \perp OP$$

これと $OQ \perp AQ$, Q は OP 上にあることとで、

$$AQ \parallel OC$$

であるから、

$$\overrightarrow{AQ} = k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$

を満たす 0 でない

定数 k が存在する。

よって、

$$(s-1)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{k}{a}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{b}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから、

$$s-1 = \frac{k}{a}, \quad t = \frac{k}{b}$$

から、

$$tb = a(s-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

これを①へ代入して、

$$s(s-1)a^2 + a(s-1)(2s-1)a\cos\theta + \{a(s-1)\}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-1) + (s-1)(2s-1)\cos\theta + (s-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (s-1)(2s-1)(1+\cos\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow s = 1, \quad \frac{1}{2}$$

しかし $s = 1$ とすると②より $t = 0$ となり、 $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ となり不適。

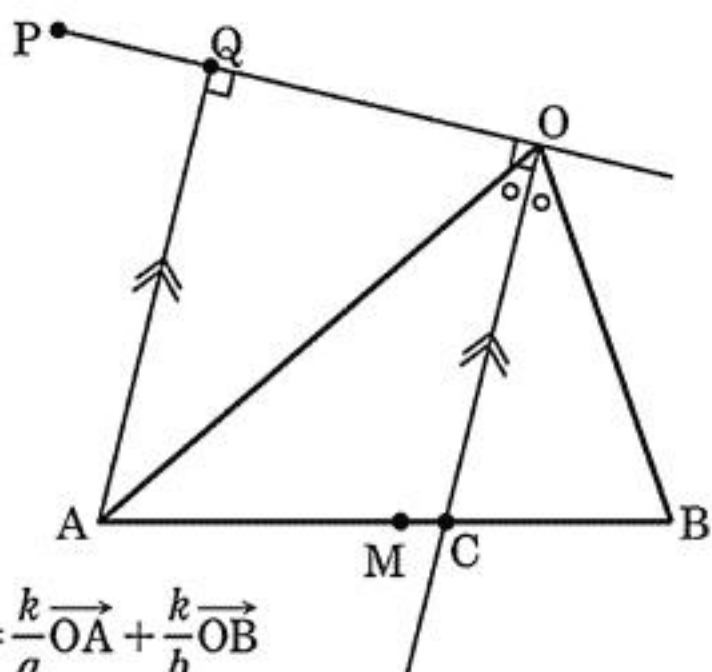
よって $s = \frac{1}{2}$ であり、このとき $t = -\frac{a}{2b}$ であるから

$$\overrightarrow{MQ} = \left(-\frac{a}{2b} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB} = -\frac{a+b}{2b}\overrightarrow{OB}$$

が成立。つまり、 $\overrightarrow{MQ}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行である。 …証明終り

(2) (1)の結果より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MQ}| &= \left| -\frac{a+b}{2b}\overrightarrow{OB} \right| \\ &= \frac{a+b}{2b} \times b \\ &= \frac{1}{2}(a+b) \\ &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}|) \quad \cdots \text{証明終り}\end{aligned}$$



⑤

(1) 条件から $p_n > 0$, $q_n > 0$ であり、

$$q_n = \log(np_n) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\left(p_n - \frac{1}{n}\right)^2 + q_n^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。①から、

$$np_n = e^{q_n}$$

であり、②から、

$$\begin{aligned} 1 - q_n^2 &= \left(p_n - \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{q_n}}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{(e^{q_n} - 1)^2}{n^2} \\ &\leq \frac{(e^1 - 1)^2}{n^2} \quad (\because 0 < q_n \leq 1) \end{aligned}$$

から、

$$1 - q_n^2 \leq \frac{(e - 1)^2}{n^2}$$

は成立する。 $0 < q_n \leq 1$ とで、

$$0 \leq 1 - q_n^2 \leq \frac{(e - 1)^2}{n^2}$$

が成立するから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e - 1)^2}{n^2} = 0$$

とで、はさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q_n^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2 = 1$$

が成立。 $q_n > 0$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ …証明終り

$$(2) \quad S_n = \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{p_n} (\log n + \log x) dx$$

$$= \left[(\log n)x + x \log x - x \right]_{\frac{1}{n}}^{p_n}$$

$$= (\log n)p_n + p_n \log p_n - p_n$$

$$- (\log n)\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n}$$

$$= p_n (\log n + \log p_n - 1) + \frac{1}{n} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (1)(2)から、

$$nS_n = np_n \{ \log(np_n) - 1 \} + 1$$

$$= e^{q_n} (\log e^{q_n} - 1) + 1$$

$$= e^{q_n} (q_n - 1) + 1$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ e^{q_n} (q_n - 1) + 1 \}$$

$$= e^1 (1 - 1) + 1$$

$$= 1 \quad \cdots \text{答}$$

