

1

(1)

$C: y = -x^2 - 1$ について、 $y' = -2x$ である。

$$y = \frac{3}{4}(x-t)^2 - t^2 - 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とすると、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow t^2 + 6xt - 3x^2 + 4y + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。これが t の 2 次方程式として実数解 t をもつための x, y の条件を求めればよい。

②の判別式を d とすると、

$$\frac{d}{4} = (3x)^2 - (-3x^2 + 4y + 4)$$

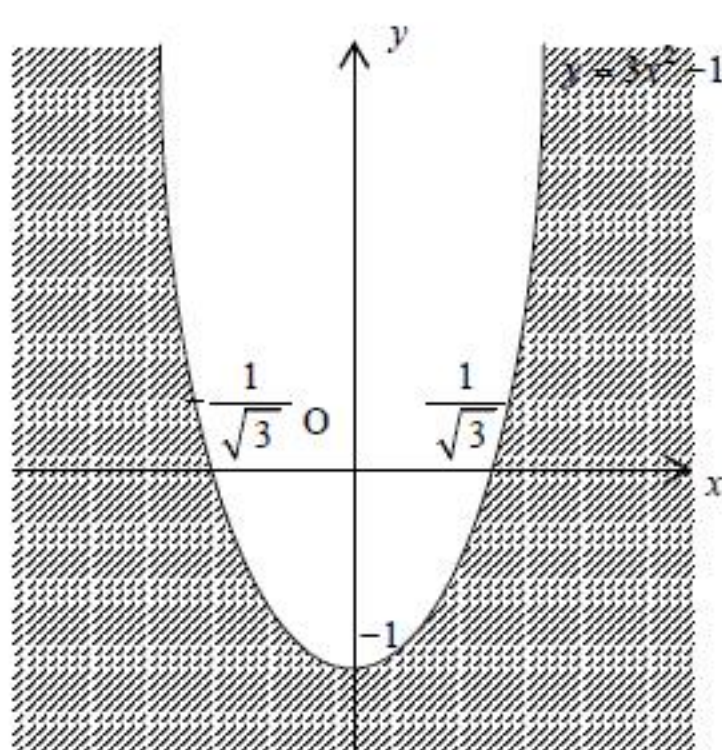
であるから、

$$y \leq 3x^2 - 1$$

である。これを満たす任意の x, y に対して②は実数解 t をもつ。

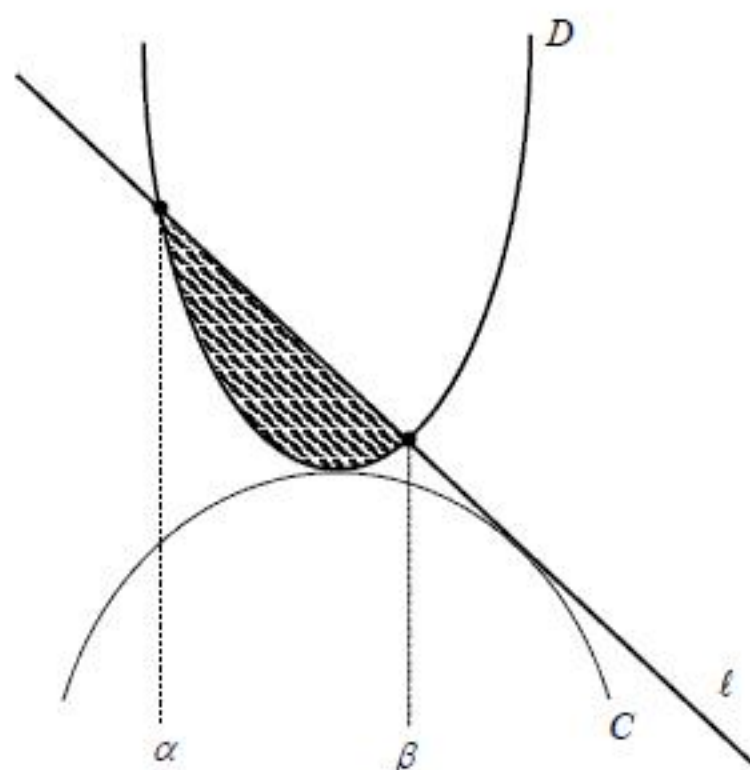
逆に、その t の値で①は点 (x, y) を通る。

よって、次図の斜線部分(境界を含む)となる。



(答) 前図

(2)



$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ での C の接線 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。 D と ℓ の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

$$\begin{aligned} 3x^2 - 1 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 9x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$\alpha + \beta = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \alpha\beta = -\frac{1}{9}$$

を満たす。よって、 D と ℓ で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3} - (3x^2 - 1) \right\} dx &= -3 \left(-\frac{1}{6} \right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{243} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{32\sqrt{3}}{243}$

(1)

$$2^x + 3^y = 43 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 x - \log_3 y = 1 \cdots \textcircled{2}$$

とする。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2^x = 43 - 3^y$$

であり、 $2^x > 0$ であるから、

$$43 - 3^y > 0$$

$$\Leftrightarrow 3^y < 43$$

である。 y は自然数であるからこれを満たす y は、

$$y = 1, 2, 3$$

のみである。

[1] $y = 1$ のとき

①より、

$$2^x = 40$$

であり、これを満たす自然数 x は存在しない。

[2] $y = 2$ のとき

①より、

$$2^x = 34$$

であり、これを満たす自然数 x は存在しない。

[3] $y = 3$ のとき

①より、

$$2^x = 16$$

であり、これは $x = 4$ のときのみ成立する。

また、 $x = 4, y = 3$ は②も満たす。

以上より、

$$x = 4, y = 3$$

となる。

(答) $x = 4, y = 3$

(2)

$y > 0, y \neq 3$ なる実数解が存在するかどうか調べる。

[1] $0 < y < 3$ のとき

①より $3^y = 43 - 2^x$ について、

$$3^0 < 3^y < 3^3$$

$$\Leftrightarrow 1 < 43 - 2^x < 27$$

$$\Leftrightarrow 4 < x < \log_2 42$$

であり、②より $\log_3 y = \log_2 x - 1$ について、

$$\log_3 y < \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4$$

である。よって①、②は $0 < y < 3$ なる共通解をもち得ない。

[2] $3 < y$ のとき

①より $3^y = 43 - 2^x$ について、

$$3^3 < 3^y$$

$$\Leftrightarrow 27 < 43 - 2^x$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

であり、②より $\log_3 y = \log_2 x - 1$ について、

$$\log_3 3 < \log_3 y$$

$$\Leftrightarrow 1 < \log_2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4 < x$$

である。よって①、②は $3 < y$ なる共通解をもち得ない。

以上の結果と(1)の結果とで題意は示された。

(証明終)

(1)

$$(|x|-2)^2 + (|y|-2)^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。①は、

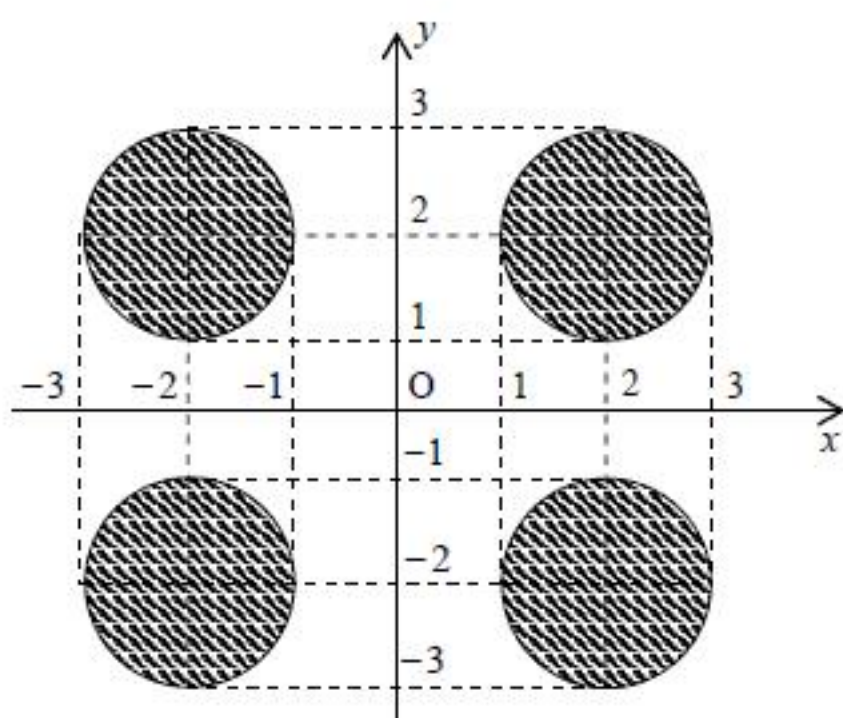
$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ のとき } (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

$$x < 0, y \geq 0 \text{ のとき } (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

$$x < 0, y < 0 \text{ のとき } (x+2)^2 + (y+2)^2 \leq 1$$

$$x \geq 0, y < 0 \text{ のとき } (x-2)^2 + (y+2)^2 \leq 1$$

である。したがって、求める領域は次図の斜線部分となる。(ただし境界を含む。)



(答) 前図

(2)

(1)の領域内の20の格子点 (x 座標, y 座標が共に整数であるような点) について考える。

$$|a_1 - a_2| = 1 \text{ のとき } |a_3 - a_4| = 2$$

$$|a_1 - a_2| = 2 \text{ のとき } |a_3 - a_4| = 1, 2, 3$$

$$|a_1 - a_2| = 3 \text{ のとき } |a_3 - a_4| = 2$$

のときのみ、点 $(a_1 - a_2, a_3 - a_4)$ は(1)の領域に含まれる。

$k=1, 3$ のとき、

$$|a_k - a_{k+1}| = 1 \text{ を満たす } (a_k, a_{k+1}) \text{ の組は } 5 \times 2 = 10 \text{ (通り)}$$

$$|a_k - a_{k+1}| = 2 \text{ を満たす } (a_k, a_{k+1}) \text{ の組は } 4 \times 2 = 8 \text{ (通り)}$$

$$|a_k - a_{k+1}| = 3 \text{ を満たす } (a_k, a_{k+1}) \text{ の組は } 3 \times 2 = 6 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{10 \times 8 + 8 \times (10 + 8 + 6) + 6 \times 8}{6^4} = \frac{20}{81}$$

となる。

(答) $\frac{20}{81}$