

1

(1)

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^x}$$

$$f''(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$$

より,

$$\begin{aligned}\log f''(x) &= \log \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2} \\ &= \log 2 + \log e^x - \log (1 + e^x)^2 \\ &= -\{2 \log (1 + e^x) - x - \log 2\} \\ &= -f(x)\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx &= \int_0^{\log 2} (x - \log 2) f''(x) dx \\ &= \left[(x - \log 2) f'(x) \right]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} f'(x) dx \\ &= 0 - \left[f(x) \right]_0^{\log 2} \\ &= f(0) - f(\log 2) \\ &= 3 \log 2 - 2 \log 3\end{aligned}$$

となる。

(答) $3 \log 2 - 2 \log 3$

C_1, C_2 より x^2 を消去すると,

$$(3-3y^2)\sin^2\theta - y^2\cos^2\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \sin^2\theta$$

であり, このとき,

$$x^2 = 3\cos^2\theta$$

である. よって, 2 曲線 C_1, C_2 の交点で第 1 象限の点 P の座標は,

$$P(\sqrt{3}\cos\theta, \sin\theta)$$

である. ここで, C_1 の方程式について両辺を x で微分すると,

$$2x + 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

であるから, $x = \sqrt{3}\cos\theta, y = \sin\theta$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{3\sin\theta}$$

である. よって, C_1 上の点 P における接線の方程式は,

$$y = -\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{3\sin\theta}(x - \sqrt{3}\cos\theta) + \sin\theta$$

であり, $x = 0$ とすることで点 Q の座標は,

$$Q\left(0, \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

となる. 同様に, C_2 の方程式について両辺を x で微分すると,

$$\frac{2x}{\cos^2\theta} - \frac{2y\frac{dy}{dx}}{\sin^2\theta} = 0$$

であるから, $x = \sqrt{3}\cos\theta, y = \sin\theta$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta}$$

である. よって, C_2 上の点 P における接線の方程式は,

$$y = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta}(x - \sqrt{3}\cos\theta) + \sin\theta$$

であり, $x = 0$ とすることで点 R の座標は,

$$R(0, -2\sin\theta)$$

となる. QR の長さを $f(\theta)$ とすると,

$$f(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} + 2\sin\theta$$

$$f'(\theta) = \frac{\cos\theta(2\sin^2\theta - 1)}{\sin^2\theta}$$

であるから, $f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最小となり, 線分 QR の長さの最小値は,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \right) \ell &= 2 \\ \Leftrightarrow (2n - mn + 2m) \ell &= 4m \\ \Leftrightarrow (m-2)(n-2) &= 4 - \frac{4m}{\ell} \end{aligned}$$

であり、 $m, \ell > 0$ であるから、右辺は 4 未満である。

また、 m, n は 3 以上の自然数であるから、

$$(m-2)(n-2) = 1 \text{ または } 2 \text{ または } 3$$

の可能性しかない。

[1] $(m-2)(n-2) = 1$ のとき

$$(m, n) = (3, 3)$$

のみであり、このとき $\ell = 4$ となるので条件に適する。

[2] $(m-2)(n-2) = 2$ のとき

$(m, n) = (4, 3)$ で、 $\ell = 8$ となり適する。

$(m, n) = (3, 4)$ で、 $\ell = 6$ となり適する。

[3] $(m-2)(n-2) = 3$ のとき

$(m, n) = (5, 3)$ で、 $\ell = 20$ となり適する。

$(m, n) = (3, 5)$ で、 $\ell = 12$ となり適する。

以上[1], [2], [3]より、

$$(\ell, m, n) = (4, 3, 3), (8, 4, 3), (6, 3, 4), (20, 5, 3), (12, 3, 5)$$

となる

$$(\text{答}) (\ell, m, n) = (4, 3, 3), (8, 4, 3), (6, 3, 4), (20, 5, 3), (12, 3, 5)$$

球 T_1 の中心を $O_1(0, 0, 0)$ 、球 T_2 の中心を $O_2(0, 0, -2)$ 、球 S の中心を $O_3(x, y, z)$ とすると、条件より、

$$\overline{O_3O_1} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

$$\overline{O_3O_2} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z+2)^2 \geq 4$$

これらを満たす実数 x, y, z の存在条件を考える。

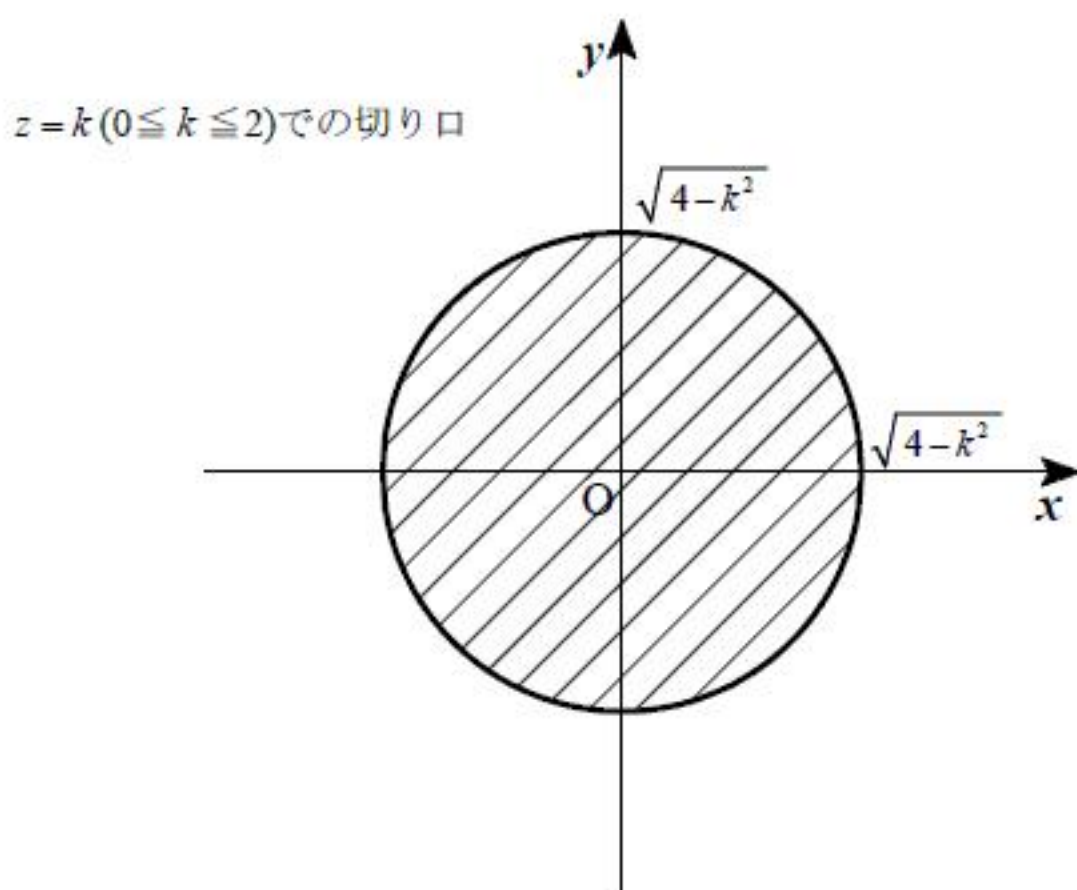
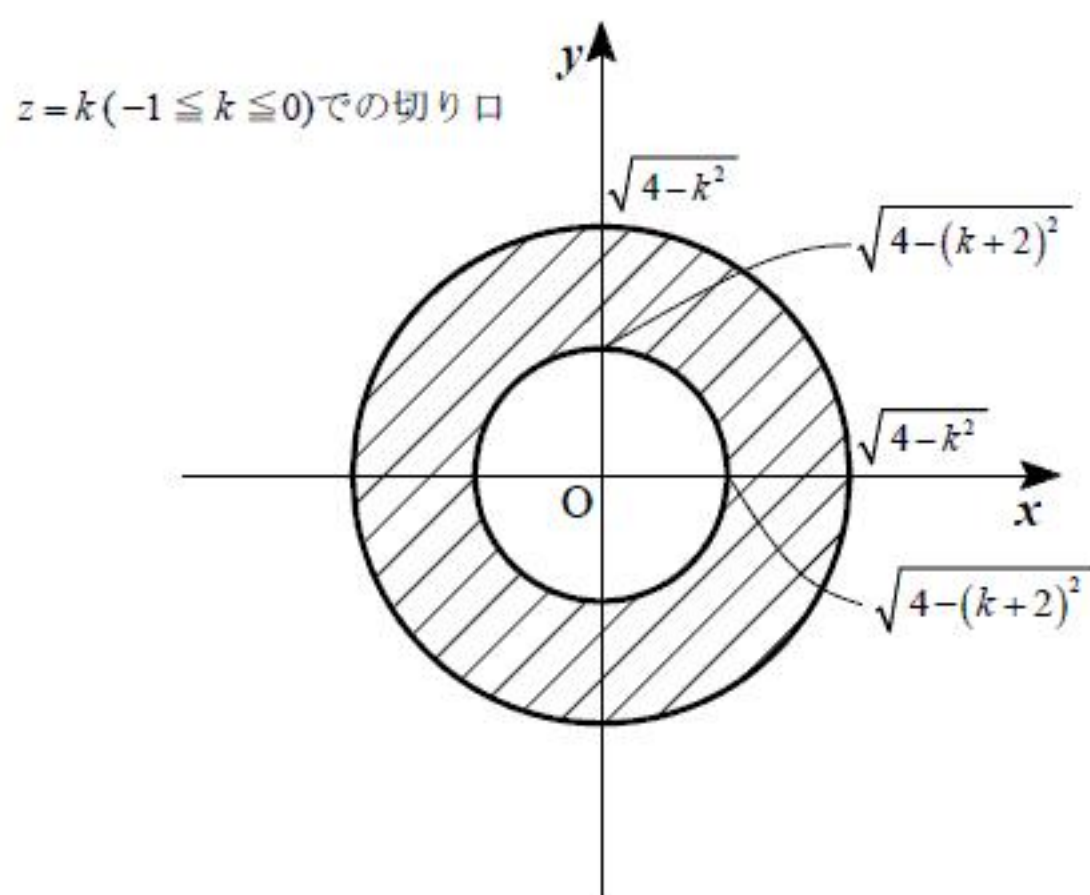
$$4 - (z+2)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2$$

の形から、

$$4 - (z+2)^2 \leq 4 - z^2 \text{ かつ } 0 \leq 4 - z^2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq z \leq 2$$

である。また、 $4 - (z+2)^2 \leq 0$ となるのは $z \leq -4, 0 \leq z$ のときである。

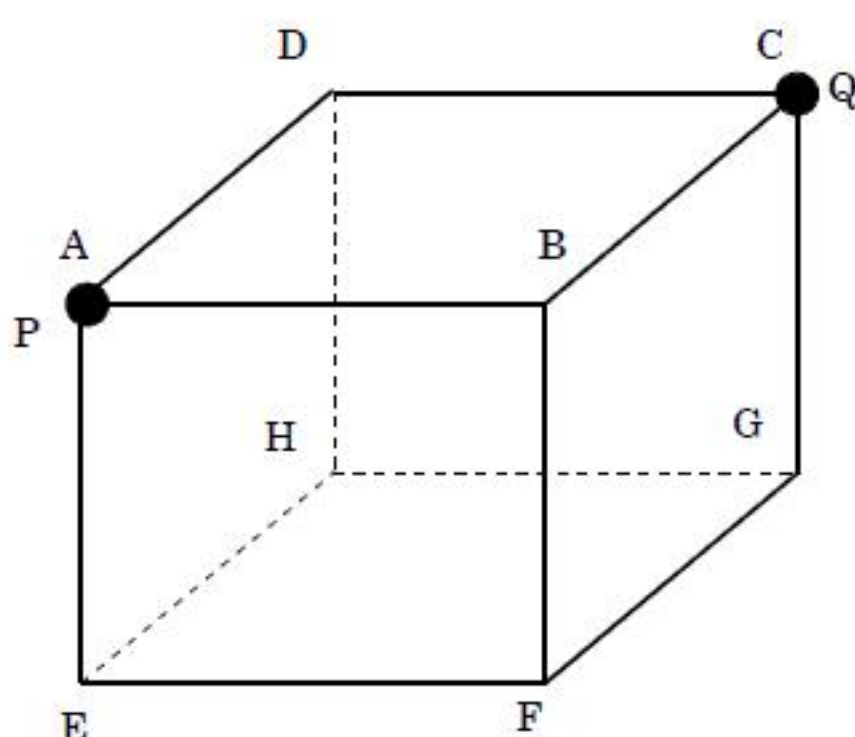


求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^0 \pi \left[4 - z^2 - \left\{ 4 - (z+2)^2 \right\} \right] dz + \int_0^2 \pi (4 - z^2) dz \\ &= 2\pi \left[(z+1)^2 \right]_{-1}^0 + \pi \left[4z - \frac{1}{3}z^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{22}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。

(1)



動点 P が頂点 A から移動可能なのは頂点 D, B, E のみである。

動点 Q が頂点 C から移動可能なのは頂点 D, B, G のみである。

よって、全部で 9 通りの移動方法があるが、 P と Q が異なる頂点に移動するのは、

$$(P, Q) = (D, B), (D, G), (B, D), (B, G), (E, D), (E, B), (E, G)$$

の 7 通りのみである。

残り 2 通りは $(D, D), (B, B)$ で同じ頂点に移動するものである。

$$(\text{答}) \quad (P, Q) = (D, B), (D, G), (B, D), (B, G), (E, D), (E, B), (E, G)$$

(2)

(1) の 7 通りは全て 2 頂点 A, C と同様の位置関係(立方体の 1 つの面の対角線の端と端)になっている。図形の対称性を考慮すると、動点 P, Q が一致しない場合は常に同様の位置関係になる。

時刻 n において動点 P, Q が異なる頂点にあるためには、 n 回の移動全てに(1)の 7 通りと同様の移動を行ったときだけであるから、

$$r_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

(3)

$n+1$ 回の移動後に動点 P, Q が共に上面 $ABCD$ または下面 $EFGH$ の異なる頂点に位置するのは、

・ n 回後の移動後に動点 P, Q が共に上面 $ABCD$ または下面 $EFGH$ の異なる頂点に位置し P, Q 共に同じ面内へ移動するか(2 通り), P, Q ともに他方の面に移動するとき(1 通り)

・ n 回後の移動後に動点 P と Q のいずれか一方が上面 $ABCD$, 他方が下面 $EFGH$ に位置し P, Q 共に同じ面内へ集まるとき(2 通り)

のいずれかであるから、

$$p_{n+1} = \frac{3}{9}p_n + \frac{2}{9}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n$$

(4)

(2) より、

$$p_n + q_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。①, ②より q_n を消去すると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^n - p_n\right\} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} &= \frac{1}{9}\left\{p_n - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

であり、また $p_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n &= \left\{p_1 - \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)\right\}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{q_n}{p_n} &= \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^n - p_n}{p_n} \\ &= \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^n - \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n} \\ &= \frac{2 - 2\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{1}{7}\right)^n} \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = 2$$