

平成 22 年 度

前 期 日 程

# 数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に右詰めで正確に記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、解答用紙の指定されたところに記入すること。指定された場所以外に記入してはいけない。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること。



(下書き用紙)

(下書き用紙)

1

関数

$$f(x) = 2\log(1 + e^x) - x - \log 2$$

を考える. ただし, 対数は自然対数であり,  $e$  は自然対数の底とする.

(1)  $f(x)$  の第 2 次導関数を  $f''(x)$  とする. 等式

$$\log f''(x) = -f(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 定積分  $\int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx$  を求めよ.

(配点率 20 %)

2

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする. 2 つの曲線

$$C_1: x^2 + 3y^2 = 3, \quad C_2: \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$$

の交点のうち,  $x$  座標と  $y$  座標がともに正であるものを  $P$  とする.  $P$  における  $C_1, C_2$  の接線をそれぞれ  $\ell_1, \ell_2$  とし,  $y$  軸と  $\ell_1, \ell_2$  の交点をそれぞれ  $Q, R$  とする.  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき, 線分  $QR$  の長さの最小値を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

**3**  $\ell, m, n$  を 3 以上の整数とする. 等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす  $\ell, m, n$  の組をすべて求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

**4** 半径 3 の球  $T_1$  と半径 1 の球  $T_2$  が、内接した状態で空間に固定されている.

半径 1 の球  $S$  が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く.

(A)  $S$  は  $T_1$  の内部にあるか  $T_1$  に内接している.

(B)  $S$  は  $T_2$  の外部にあるか  $T_2$  に外接している.

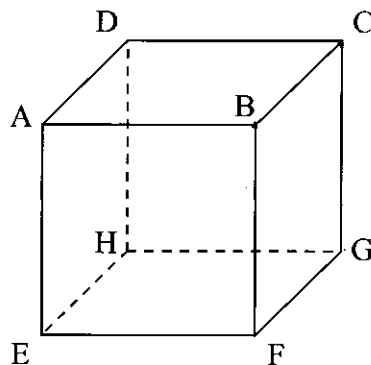
$S$  の中心が存在しうる範囲を  $D$  とするとき, 立体  $D$  の体積を求めよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5  $n$  を 0 以上の整数とする. 立方体 ABCD-EFGH の頂点を, 以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える. 時刻 0 には P は頂点 A に位置し, Q は頂点 C に位置している. 時刻  $n$  において, P と Q が異なる頂点に位置していれば, 時刻  $n+1$  には, P は時刻  $n$  に位置していた頂点から, それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り, Q も時刻  $n$  に位置していた頂点から, それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る. 一方, 時刻  $n$  において, P と Q が同じ頂点に位置していれば, 時刻  $n+1$  には P も Q も時刻  $n$  の位置からは移動しない.

- (1) 時刻 1 において, P と Q が異なる頂点に位置するとき, P と Q はどの頂点にあるか. 可能な組み合わせをすべて挙げよ.
- (2) 時刻  $n$  において, P と Q が異なる頂点に位置する確率  $r_n$  を求めよ.
- (3) 時刻  $n$  において, P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか, またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を  $p_n$  とする. また, 時刻  $n$  において, P と Q のいずれか一方が上面 ABCD, 他方が下面 EFGH にある確率を  $q_n$  とする.  $p_{n+1}$  を,  $p_n$  と  $q_n$  を用いて表せ.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$  を求めよ.



(配点率 20 %)





