

1

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、

①で $l = m = 0$, $n = 1$ としたとき、

$$-x = y \quad \cdots \textcircled{2}$$

①で $l = 0$, $m = 1$, $n = 0$ としたとき、

$$10^{x-z} = 36 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①で $l = 1$, $m = n = 0$ としたとき、

$$10^{x-y} + 10^{y-z} = 13 \quad \cdots \textcircled{4}$$

②より $y = -x$ を④へ代入して、

$$10^{2x} + 10^{-x-z} = 13 \quad \cdots \textcircled{4}'$$

ここで $10^x = X$, $10^z = Z$ とおくと $X > 0$, $Z > 0$ であり、

$$\textcircled{3} \text{ より } \frac{X}{Z} = 36 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}' \text{ より } X^2 + \frac{1}{XZ} = 13 \quad \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥から Z を消去すると、

$$X^2 + \frac{36}{X^2} = 13$$

$$\Leftrightarrow X^4 - 13X^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X^2 - 4)(X^2 - 9) = 0$$

$X > 0$ だから、 $X = 2, 3$ つまり、 $x = \log_{10} 2$, $\log_{10} 3$

よって、 $Z = \frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$ つまり、 $z = -\log_{10} 18$, $-\log_{10} 12$

以上から、②とあわせて、

$$(x, y, z) = (\log_{10} 2, -\log_{10} 2, -\log_{10} 18), (\log_{10} 3, -\log_{10} 3, -\log_{10} 12) \quad \cdots \textcircled{*}$$

逆に※のとき、①の両辺が一致することが確認できるから、①は任意の整数

l, m, n に対して成立する。よって※が求める値すべてである。 …答

②

(1) 条件から、

$$1 = f(0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(x - p)^2 + q = x \text{ は正の重解を持つ} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。①より、

$$p^2 + q = 1$$

$$\Leftrightarrow q = 1 - p^2 \quad \cdots \textcircled{1}'$$

①' を②の方程式へ代入し、 q を消去することで、

$$x^2 - (2p + 1)x + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が正の重解を持つための条件は、

$$(2p + 1)^2 - 4 = 0, \quad 2p + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2p + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \quad \cdots \text{答}$$

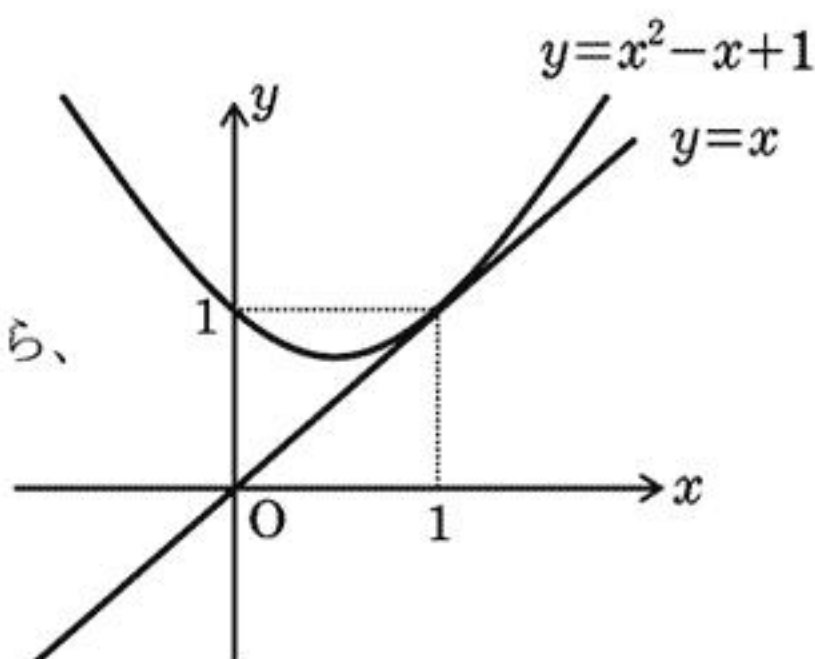
$$\text{このとき} \textcircled{1}' \text{ から } q = \frac{3}{4} \quad \cdots \text{答}$$

また接点の x 座標は、③の重解だから、

$$x = \frac{2p + 1}{2} = 1$$

よって求める接点の座標は、

$$(1, 1) \quad \cdots \text{答}$$



(2) $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ とおくと、

$$g(x) = (x - p_2)^2 + q_2 - \{ (x - p_1)^2 + q_1 \}$$

$$= 2(p_1 - p_2)x + p_2^2 - p_1^2 + q_2 - q_1$$

となり、これは x の 1 次関数である。よって、 $\alpha < \beta$ のとき

$\alpha \leq x \leq \beta$ における関数 $g(x)$ の最小値を m とすると、

$$m = \min \{ g(\alpha), g(\beta) \}$$

を満たす。すると、

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

つまり、

$$g(\alpha) > 0 \quad \text{かつ} \quad g(\beta) > 0$$

であれば、 $m > 0$ であるから、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において $g(x) > 0$

つまり $f_1(x) < f_2(x)$ が成り立つ。 $\cdots$ 証明終わり

(3) まず、 $f(0) \leq 1$ または $f(1) \leq 1$ が成立するときは、

$y = f(x)$ と図形 L は共有点を持つか、または $y = f(x)$ が

長方形 R と共有点を持たないので不適。

よって、図形 L と $y = f(x)$ が共有点を持たないためには、

$$f(0) > 1 \quad \text{かつ} \quad f(1) > 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が必要。これは、

$$f_0(x) = x^2 - x + 1$$

としたとき、

$$f_0(0) < f(0) \quad \text{かつ} \quad f_0(1) < f(1)$$

を意味する。よって(2)の結果より

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で常に } f_0(x) < f(x)$$

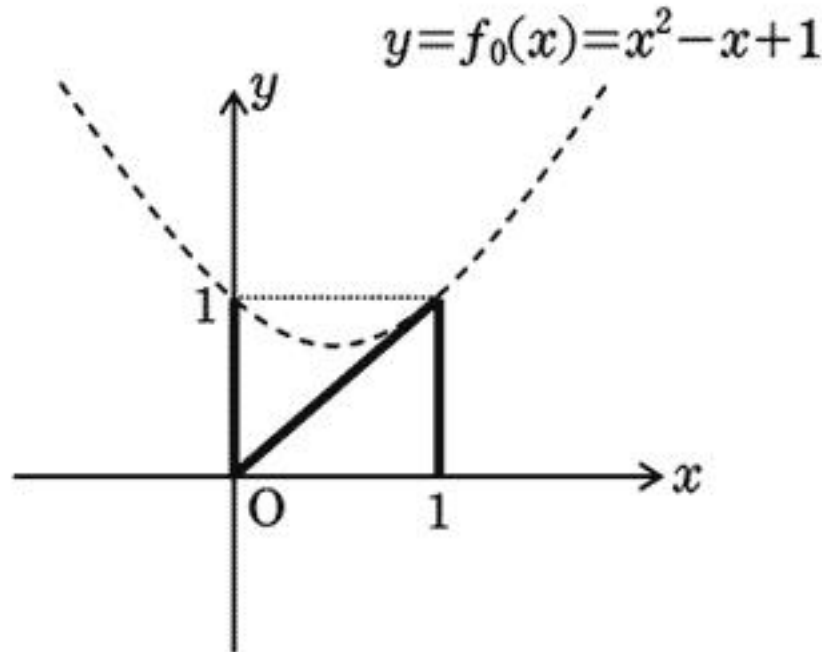
また(1)の結果から、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で常に } x \leq f_0(x) \quad (\text{等号は } x = 1 \text{ のときのみ成立})$$

が成立しているから、まとめることで、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で常に } x \leq f_0(x) < f(x) \quad (\text{等号は } x = 1 \text{ のときのみ成立})$$

が成立する。以上から④が成立するとき、関数 $y = f(x)$ は問いの条件を満たす。



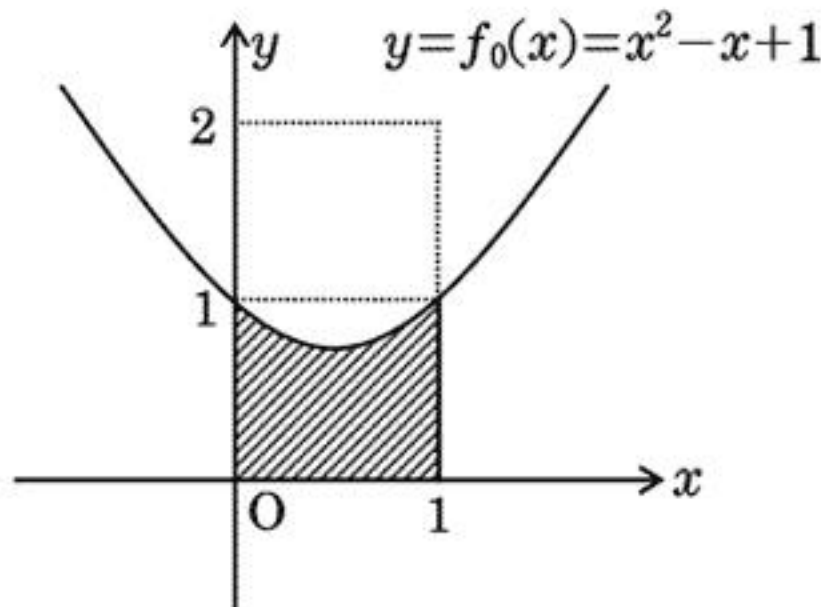
以上より領域 S は図の斜線部分 (境界はすべて含む) となり、

その面積は、

$$S = \int_0^1 f_0(x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{5}{6} \quad \cdots \text{答}$$



[3]

$$(\vec{v_1} \cdot \vec{p})\vec{v_1} + (\vec{v_2} \cdot \vec{p})\vec{v_2} + (\vec{v_3} \cdot \vec{p})\vec{v_3} = c\vec{p} \quad \cdots ※$$

(1) $\vec{v} = s\vec{v_1} + t\vec{v_2}$ を満たすとき、

$$(x, y) = s(3, 0) + t(1, 2\sqrt{2})$$

から、

$$x = 3s + t, \quad y = 2\sqrt{2}t$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{3} \left(x - \frac{y}{2\sqrt{2}} \right), \quad t = \frac{y}{2\sqrt{2}} \quad \cdots ①$$

よって任意の x, y 対して、①を満たす s, t が存在するから

任意のベクトル $\vec{v}$ は $\vec{v} = s\vec{v_1} + t\vec{v_2}$ の形に表される。 $\cdots$ 証明終わり

(2) ※で $\vec{p} = s\vec{v_1} + t\vec{v_2}$ としたもの考える。

$$\begin{aligned} & \{ \vec{v_1} \cdot (s\vec{v_1} + t\vec{v_2}) \} \vec{v_1} + \{ \vec{v_2} \cdot (s\vec{v_1} + t\vec{v_2}) \} \vec{v_2} \\ & + \{ \vec{v_3} \cdot (s\vec{v_1} + t\vec{v_2}) \} \vec{v_3} = c(s\vec{v_1} + t\vec{v_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (s|\vec{v_1}|^2 + t\vec{v_1} \cdot \vec{v_2})\vec{v_1} + (s\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} + t|\vec{v_2}|^2)\vec{v_2} \\ & + (s\vec{v_3} \cdot \vec{v_1} + t\vec{v_2} \cdot \vec{v_3})\vec{v_3} = c(s\vec{v_1} + t\vec{v_2}) \end{aligned}$$

ここで、

$$|\vec{v_1}|^2 = |\vec{v_2}|^2 = 9, \quad \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 3, \quad \vec{v_2} \cdot \vec{v_3} = 3a + 9b, \quad \vec{v_3} \cdot \vec{v_1} = 9a + 3b$$

であるから、

$$(9s + 3t)\vec{v_1} + (3s + 9t)\vec{v_2} + \{ (9a + 3b)s + (3a + 9b)t \} \vec{v_3} = c(s\vec{v_1} + t\vec{v_2}) \quad \cdots ※※$$

条件より※※で $s = 0, t = 1$ としたもの、 $s = 1, t = 0$ としたものが成立するから、

※※で $s = 0, t = 1$ とすると、

$$3\vec{v_1} + 9\vec{v_2} + (3a + 9b)\vec{v_3} = c\vec{v_2}$$

$\vec{v_3} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$ を代入して整理すると、

$$3(a^2 + 3ab + 1)\vec{v_1} + 3(3b^2 + ab + 3)\vec{v_2} = c\vec{v_2}$$

(1)の結果より $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ は一次独立なので、

$$a^2 + 3ab + 1 = 0 \quad \cdots ②$$

※※で $s = 1, t = 0$ とすると、

$$9\vec{v_1} + 3\vec{v_2} + (9a + 3b)\vec{v_3} = c\vec{v_1}$$

$\vec{v_3} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$ を代入して整理すると、

$$3(3a^2 + ab + 3)\vec{v_1} + 3(b^2 + 3ab + 1)\vec{v_2} = c\vec{v_1}$$

$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ は一次独立なので、

$$b^2 + 3ab + 1 = 0 \quad \cdots ③$$

②, ③を解いて、

$$(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (これ以下、複号同順)}$$

このとき、※※の式の左辺は、

$$\begin{aligned} & (9s + 3t)\vec{v_1} + (3s + 9t)\vec{v_2} \\ & + \left\{ \left(\pm \frac{9}{\sqrt{2}} \mp \frac{3}{\sqrt{2}} \right) s + \left(\pm \frac{3}{\sqrt{2}} \mp \frac{9}{\sqrt{2}} \right) t \right\} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{v_1} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{v_2} \right) \end{aligned}$$

$$= 12(s\vec{v_1} + t\vec{v_2})$$

となるから、(1)の結果とあわせて、※は任意の $\vec{p}$ で成立する。 $\cdots$ 証明終わり

(3) (2)の計算により、

$$(a, b, c) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 12 \right) \quad \cdots \text{答}$$