

[1]

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{a^2 + 1} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} & -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{pmatrix}$$

について、

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right)^2 = \frac{a^2 + 1}{a^2 + 1} = 1$$

を満たすから、

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \cos \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

を満たす θ が存在する。よって、

$$r = \sqrt{a^2 + 1}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad \dots \text{答}$$

(2) 変換 f は、原点を中心として角度 θ ($0 < \theta < \pi$) の回転と、 r 倍の相似拡大を与える一次変換である。よって、

$$\overline{OQ_n} = \overline{OQ_1} \times r^{n-1}$$

$$= \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{n-1}$$

を満たす。三角形 OQ_nQ_{n+1} は

$$\overline{OQ_{n+1}} = r \overline{OQ_n}$$

$$\angle Q_n O Q_{n+1} = \theta$$

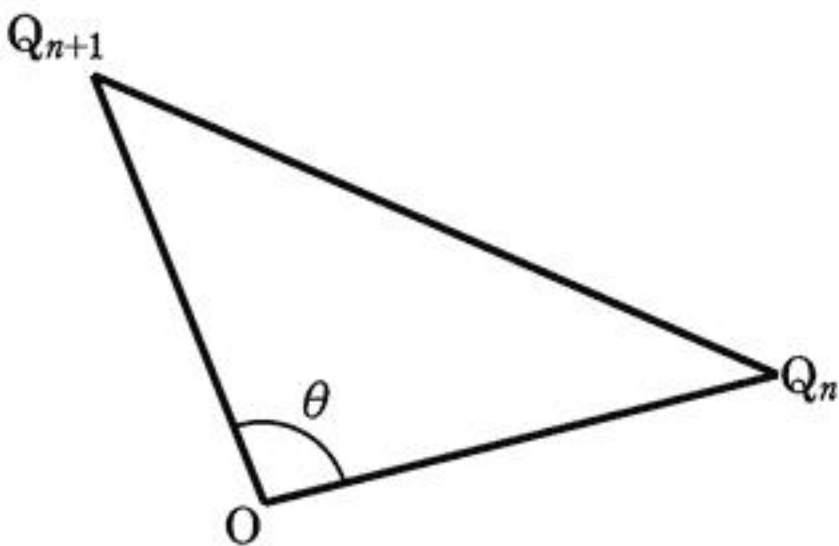
であるような三角形であるから、その面積 $S(n)$ は、

$$S(n) = \frac{1}{2} \overline{OQ_n} \overline{OQ_{n+1}} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{n-1} \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^n \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^{2n-2}$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 + 1)^{n-1} \quad \dots \text{答}$$



(3) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

が成立する。 $\det A = a^2 + 1 > 0$ だから A^{-1} は存在し、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} 2a + 7 \\ 7a - 2 \end{pmatrix}$$

条件より、

$$\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{2a + 7}{a^2 + 1} < \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 4a - 11 \leq 0 & \dots \text{①} \\ 5a^2 - 4a - 9 > 0 & \dots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} \quad \Leftrightarrow \quad a < -1, \quad \frac{9}{5} < a$$

であり、 a は自然数だから $a \geq 2$ で考えれば十分。

$$g(a) = a(3a - 4) - 11$$

とおくと $g(a)$ は $a \geq 2$ では増加する関数であり、

$$g(2) = -7 < 0$$

$$g(3) = 4 > 0$$

なので①を満たすのは $a = 2$ のみ。よって、

$$a = 2 \quad \dots \text{答}$$

このとき、

$$S(n) > 10^{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5^{n-1} > 10^{10}$$

$$\Leftrightarrow 5^{n-1} > 2 \cdot 10^{10}$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \log_{10} 5 > \log_{10} 2 + 10$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{11}{\log_{10} 5} \quad \dots \text{③}$$

ここで $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$ であり、

$$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$$

から、

$$0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$$

よって、

$$\frac{11}{0.7} < \log_{10} 5 < \frac{11}{0.69}$$

$$\frac{11}{0.7} = 15 + \frac{5}{7}, \quad \frac{11}{0.69} = 15 + \frac{65}{69}$$

から③を満たす最小の自然数 n は、 $n = 16$ $\dots \text{答}$

2

線分 PQ の方程式は、

$$\theta = 0 \text{ のとき、 } y = 0 \text{ (} 0 \leq x \leq 8 \text{)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、 } x = 0 \text{ (} 0 \leq y \leq 1 \text{)}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき、 } \frac{x}{8\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1 \text{ (} 0 \leq x \leq 8\cos\theta \text{)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。以下、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で考える。

①を y について解くと、

$$y = \sin\theta - \frac{x}{8}\tan\theta$$

となり、これを $f(\theta)$ とおく。

そこで、 $x = t \text{ (} 0 < t < 8 \text{)}$ と①が共有点をもつための θ についての条件を考えると、

$$\sin\theta - \frac{t}{8}\tan\theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \geq \frac{t}{8}$$

より $\cos\theta = \frac{t}{8}$ を満たす θ を $\alpha \text{ (} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{)}$ とすると、

$0 < \theta \leq \alpha$ である。

$$f'(\theta) = \frac{\cos^3\theta - \frac{t}{8}}{\cos^2\theta}$$

であり、 $\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{t}{8}} \text{ (} \frac{t}{8} < \sqrt[3]{\frac{t}{8}} < 1 \text{)}$ を満たす θ を $\theta = \beta \text{ (} 0 < \beta < \alpha \text{)}$

とすると、関数 $f(\theta)$ の増減は右のようになる。

よって $f(\theta)$ の $0 < \theta \leq \alpha$ における値域は、

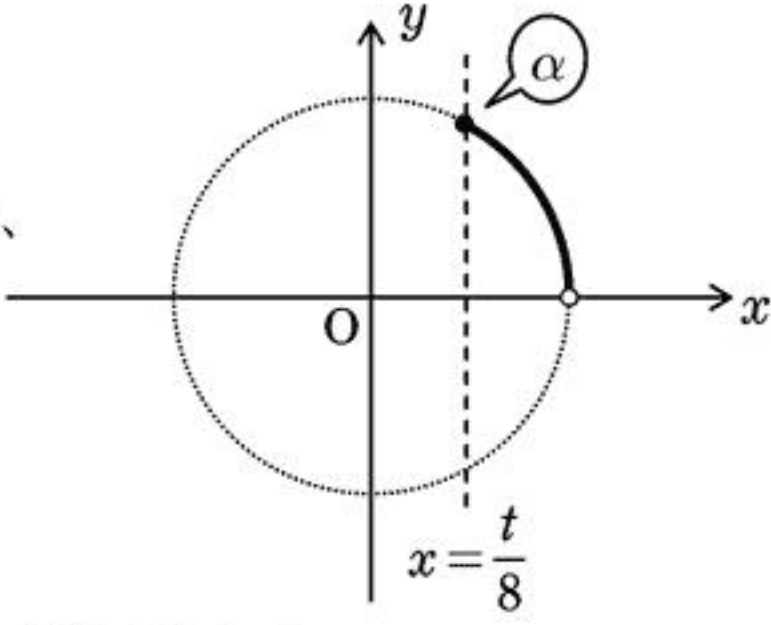
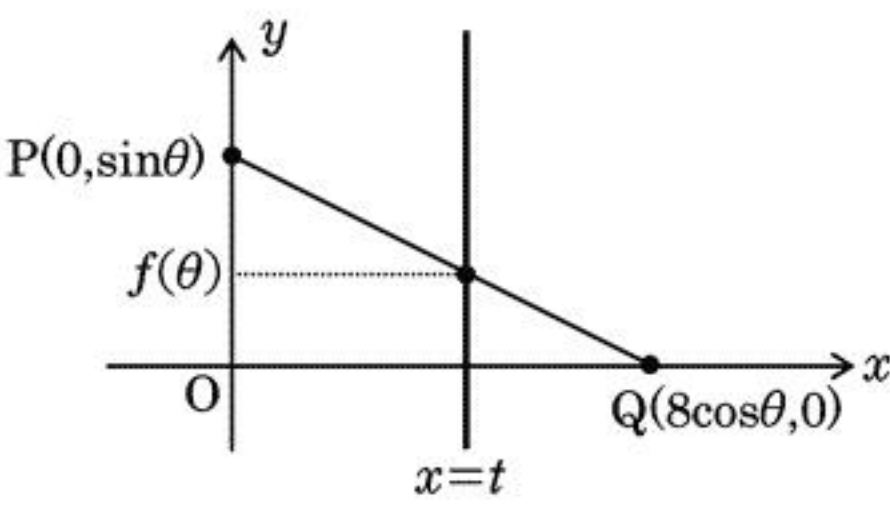
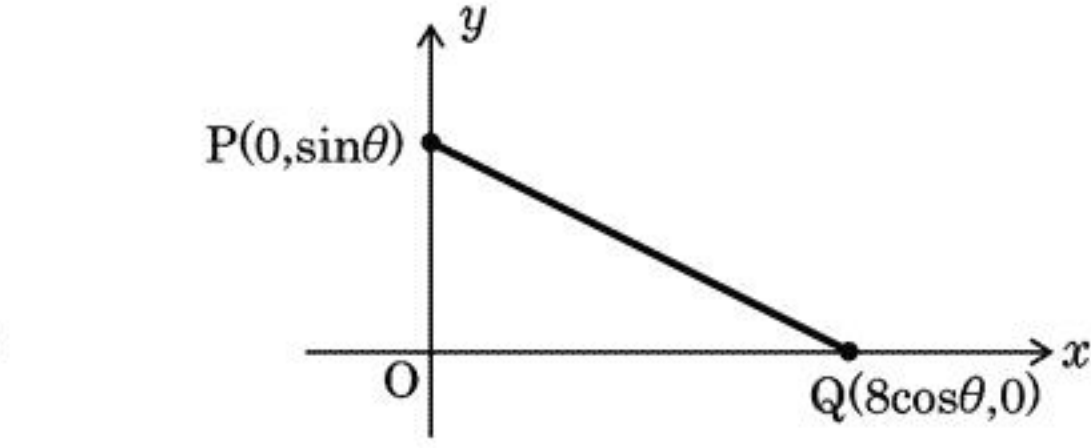
$$f(\beta) = \sin\beta - \frac{t}{8}\tan\beta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{4-t^{\frac{2}{3}}}}{2} - \frac{t}{8} \frac{\sqrt{4-t^{\frac{2}{3}}}}{t^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{(4-t^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{8} \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

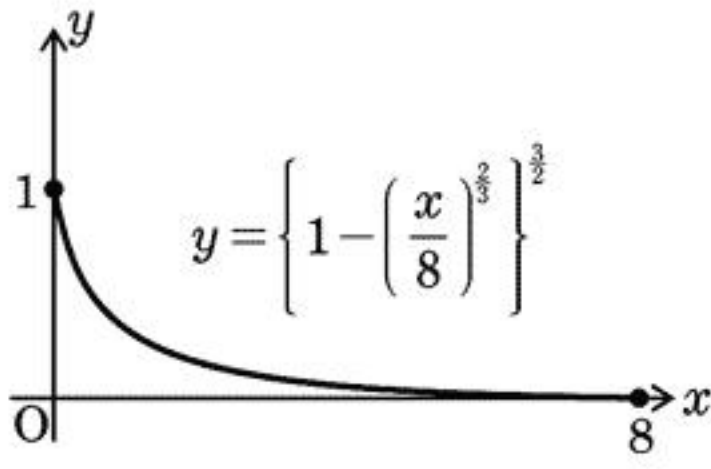
より、

$$0 < f(\theta) \leq f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow 0 < f(\theta) \leq \left\{ 1 - \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}$$



θ	(0)	...	β	...	(α)
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$	(0)	↗		↘	(0)



$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のときもあわせて考えることで、 D を x 軸の周りに

1 回転してできる立体の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^8 \left\{ 1 - \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \right\}^3 dt \\ &= \pi \int_0^8 \left\{ 1 - 3 \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{2}{3}} + 3 \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{t}{8} \right)^2 \right\} dt \\ &= \pi \left[t - 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot 8 \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{5}{3}} + 3 \cdot \frac{3}{7} \cdot 8 \left(\frac{t}{8} \right)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} \cdot 8 \left(\frac{t}{8} \right)^3 \right]_0^8 \\ &= \frac{128}{105} \pi \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

[3]

(1) 条件から、

$$1=f(0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(x-p)^2+q=x \text{ は正の重解を持つ } \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。①より、

$$p^2+q=1$$

$$\Leftrightarrow q=1-p^2 \quad \cdots \textcircled{1}'$$

①' を②の方程式へ代入し、 q を消去することで、

$$x^2-(2p+1)x+1=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が正の重解を持つための条件は、

$$(2p+1)^2-4=0, \quad 2p+1>0$$

$$\Leftrightarrow 2p+1=2$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{1}{2} \quad \cdots \text{答}$$

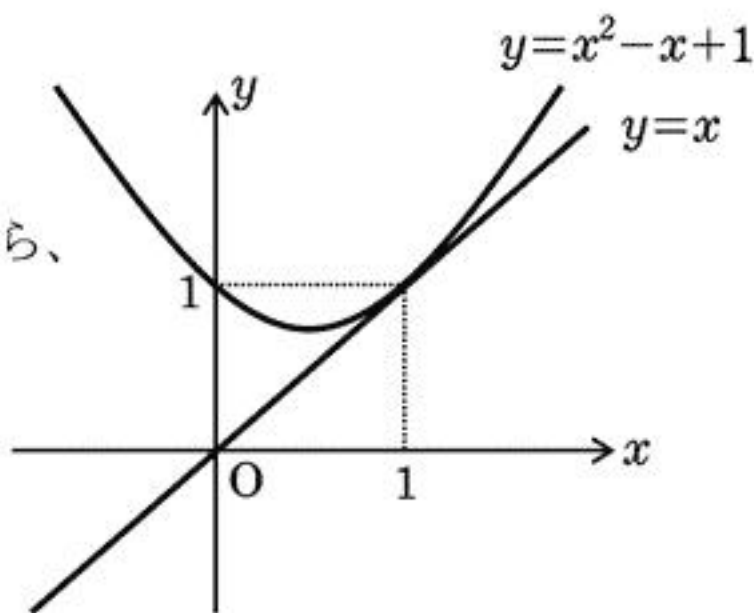
$$\text{このとき} \textcircled{1}' \text{ から } q=\frac{3}{4} \quad \cdots \text{答}$$

また接点の x 座標は、③の重解だから、

$$x=\frac{2p+1}{2}=1$$

よって求める接点の座標は、

$$(1, 1) \quad \cdots \text{答}$$



(2) $g(x)=f_2(x)-f_1(x)$ とおくと、

$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-\{(x-p_1)^2+q_1\}$$

$$=2(p_1-p_2)x+p_2^2-p_1^2+q_2-q_1$$

となり、これは x の 1 次関数である。よって、 $\alpha < \beta$ のとき

$\alpha \leq x \leq \beta$ における関数 $g(x)$ の最小値を m とすると、

$$m=\min\{g(\alpha), g(\beta)\}$$

を満たす。すると、

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

つまり、

$$g(\alpha) > 0 \quad \text{かつ} \quad g(\beta) > 0$$

であれば、 $m > 0$ であるから、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において $g(x) > 0$

つまり $f_1(x) < f_2(x)$ が成り立つ。 $\cdots$ 証明終わり

(3) まず、 $f(0) \leq 1$ または $f(1) \leq 1$ が成立するときは、

$y=f(x)$ と図形 L は共有点を持つか、または $y=f(x)$ が

長方形 R と共有点を持たないので不適。

よって、図形 L と $y=f(x)$ が共有点を持たないためには、

$$f(0) > 1 \quad \text{かつ} \quad f(1) > 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が必要。これは、

$$f_0(x)=x^2-x+1$$

としたとき、

$$f_0(0) < f(0) \quad \text{かつ} \quad f_0(1) < f(1)$$

を意味する。よって(2)の結果より

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で常に } f_0(x) < f(x)$$

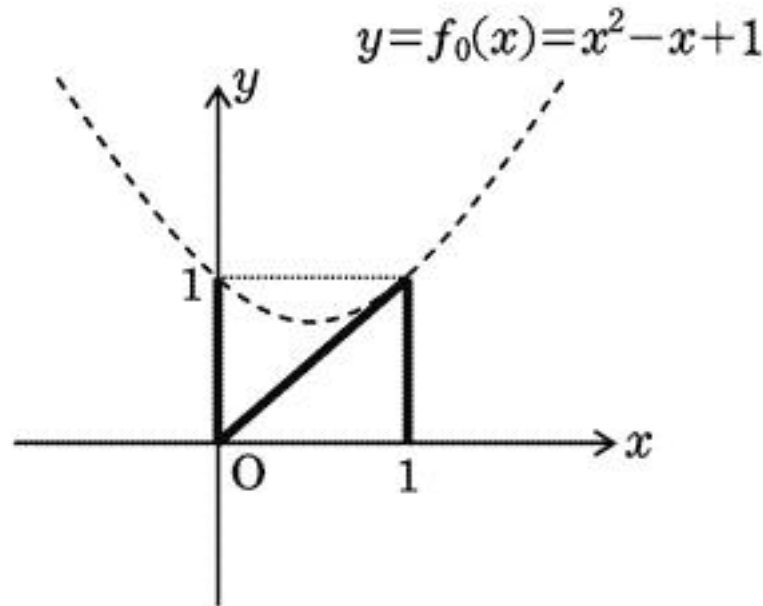
また(1)の結果から、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で常に } x \leq f_0(x) \quad (\text{等号は } x=1 \text{ のときのみ成立})$$

が成立しているから、まとめることで、

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で常に } x \leq f_0(x) < f(x) \quad (\text{等号は } x=1 \text{ のときのみ成立})$$

が成立する。以上から④が成立するとき、関数 $y=f(x)$ は問いの条件を満たす。



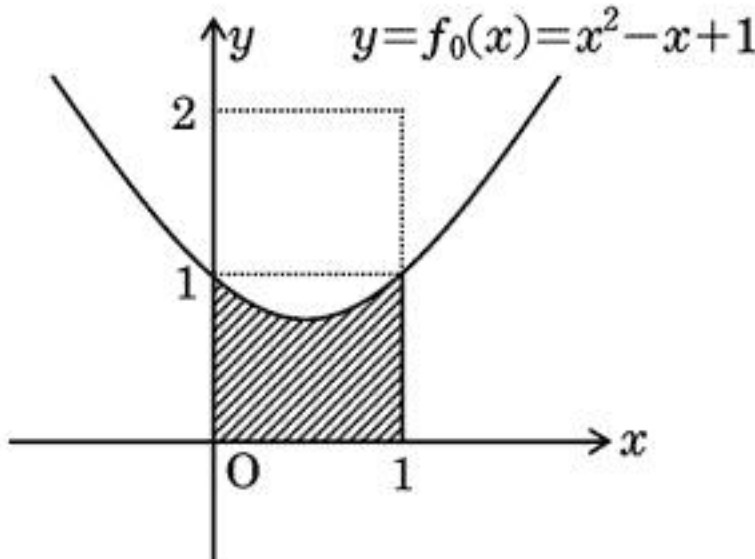
以上より領域 S は図の斜線部分 (境界はすべて含む) となり、

その面積は、

$$S=\int_0^1 f_0(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1$$

$$=\frac{5}{6} \quad \cdots \text{答}$$



④

(1) $x \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \left| \frac{px+q}{x} \right| &= \left| \frac{px+q}{x} \right| = \left| p + \frac{q}{x} \right| \\ &\leq |p| + \left| \frac{q}{x} \right| \leq |p| + |q| \end{aligned}$$

が成立する。 $|p| + |q| = r$ とおくと、

$$\left| \frac{px+q}{x} \right| \leq r$$

$\Leftrightarrow |px+q| \leq rx \quad \cdots \text{証明終わり}$

(2) $\alpha = \sqrt[3]{f(x)}$, $\beta = x+k$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \alpha^3 - \beta^3 &= f(x) - (x+k)^3 \\ &= (a-3k)x^2 + (b-3k^2)x + c - k^3 \end{aligned}$$

を満たす。よって、

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \\ &= |\alpha - \beta| \\ &= \left| \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \right| \\ &= \left| \frac{(a-3k)x^2 + (b-3k^2)x + c - k^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \right| \end{aligned}$$

ここで $k = \frac{a}{3}$ とすると $\beta > 0$ であり、 $\alpha > 0$ とで、

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > \beta^2 = (x+k)^2 > x^2 > 0$$

を満たすから、

$$\begin{aligned} &x \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \\ &= \left| \frac{(b-3k^2)x^2 + (c-k^3)x}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{(b-3k^2)x^2 + (c-k^3)x}{x^2} \right| \\ &= \left| \frac{(b-3k^2)x + (c-k^3)}{x} \right| \\ &\leq l \quad (\because (1) \text{の結果より}) \end{aligned}$$

以上から、

$$x \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq l$$

$\Leftrightarrow \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x} \quad \cdots \text{証明終わり}$

(3) (2)の結果より、 $n \geq 1$ で

$$\left| \sqrt[3]{f(n)} - n - \frac{a}{3} \right| \leq \frac{l}{n}$$

を満たす定数 l は存在する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{n} = 0$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[3]{f(n)} - n - \frac{a}{3} \right| = 0$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[3]{f(n)} - n \right| = \frac{a}{3}$$

であり、 $\sqrt[3]{f(n)} - n$ が常に整数であることから

$\frac{a}{3}$ は自然数である。よって m を自然数として、

$$\frac{a}{3} = m$$

とかける。次に、

$$\left| \sqrt[3]{f(n)} - n - m \right| \leq \frac{l}{n}$$

について、左辺は $n \geq 1$ で常に整数であるが

右辺は n が大きい値のとき、特に $n > l$ を満たす全ての n に対して

$$\frac{l}{n} < \frac{l}{l} = 1$$

が成立するので、任意の自然数 n に対して

$$\left| \sqrt[3]{f(n)} - n - m \right| = 0$$

であるしかない。つまり、

$$\sqrt[3]{f(n)} = n + m$$

よって、任意の自然数 n に対して、

$$f(n) = (n+m)^3 \quad \cdots \text{①}$$

が成立する。いま、 $f(x)$ は x の 3 次式であり、

①が異なる 4 つ以上の自然数 n に対して成立することから、

$$f(x) = (x+m)^3$$

が任意の x で成立する。 $\cdots \text{証明終わり}$

⑤

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = r_n(a_n - a_{n-1}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) p_3 : a_3 の期待値

①で $n=2$, $n=3$ としたものは、

$$a_3 - a_2 = r_2(a_2 - a_1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$a_4 - a_3 = r_3(a_3 - a_2) \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。 $a_1=0$, $a_2=r$ だから②より、

$$a_3 = r + r_2(r - 0)$$

$$= (1 + r_2)r$$

ここで r_2 は 2 通りあり、共に確率 $\frac{1}{2}$ で起こるから a_3 の期待値 p_3 は

$$p_3 = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{r}{2}\right)r + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2r}\right)r$$

$$= \frac{r^2}{4} + r + \frac{1}{4} \quad \cdots \text{答}$$

p_4 : a_4 の期待値

②, ③から、

$$a_4 - a_3 = r_3(a_3 - a_2)$$

$$= r_3 r_2(a_2 - a_1)$$

$$= r_3 r_2 r$$

また $a_3 = (1 + r_2)r$ を代入して、

$$a_4 = (r_3 r_2 + r_2 + 1)r$$

ここで (r_2, r_3) の組は 4 通りあり、全て確率は $\frac{1}{2^2}$ で起こるから、

a_4 の期待値 p_4 は、

$$p_4 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 1\right)r + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2r} \cdot \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 1\right)r$$

$$+ \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2r} \cdot \frac{r}{2} + \frac{1}{2r} + 1\right)r + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + 1\right)r$$

$$= \frac{1}{16}r^3 + \frac{1}{4}r^2 + \frac{9}{8}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{16r} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと、

$$b_1 = r, \quad b_n = r_n b_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

よって、 $b_1 > 0$ であり、 $b_{k-1} > 0$ とすると

$b_k = r_k b_{k-1} > 0$ であるから $b_n > 0$ ($n=2, 3, 4, \dots$) なので、

$$b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1$$

$$= r_n \cdot r_{n-1} \cdots r_2 \cdot r$$

となる。ここで $r_2, r_3, \dots, r_n$ の組は 2^{n-1} 通りあり、

全て同様に確からしく確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ で起こるから、

b_n の期待値、つまり $a_{n+1} - a_n$ の期待値 $p_{n+1} - p_n$ は、

$$p_{n+1} - p_n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} {}^{n-1}C_k \left(\frac{r}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2r}\right)^{n-1-k} r$$

$$= r \sum_{k=0}^{n-1} {}^{n-1}C_k \left(\frac{r}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4r}\right)^{n-1-k}$$

$$= r \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4r}\right)^{n-1}$$

よって、

$$\frac{r}{4} + \frac{1}{4r} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \pm \sqrt{3}$$

とで、

$r \neq 2 \pm \sqrt{3}$ のとき、

$$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4r}\right)^{k-1} \quad (n \geq 3 \text{ である})$$

$$= 0 + \frac{r \left\{ 1 - \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4r}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \left(\frac{r}{4} + \frac{1}{4r}\right)}$$

$$= \frac{4r^2}{r^2 - 4r + 1} \left\{ \left(\frac{r^2 + 1}{4r}\right)^{n-1} - 1 \right\} \quad \cdots \text{答}$$

$r = 2 \pm \sqrt{3}$ のとき、

$$p_n = r(n-1)$$

$$= (2 \pm \sqrt{3})(n-1) \quad \cdots \text{答}$$

(3) $r = 2 \pm \sqrt{3}$ のときは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$$

である。 $r \neq 2 \pm \sqrt{3}$ のときは、 $r > 0$ とで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2 + 1}{4r}\right)^{n-1}$$

が収束すればよいから、

$$-1 < \frac{r^2 + 1}{4r} < 1$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 4r + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3} \quad \cdots \text{答}$$

(4) $2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3}$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{4r^2}{r^2 - 4r + 1} \cdot (0 - 1)$$

$$= \frac{-4r^2}{r^2 - 4r + 1}$$

これを $f(r)$ とおき、 $\frac{1}{r} = s$ とすると

$$2 - \sqrt{3} < s < 2 + \sqrt{3}$$

であり、

$$f(r) = -\frac{4}{1 - 4s + s^2}$$

$$= \frac{4}{-(s-2)^2 + 3}$$

$$\geq \frac{4}{-0^2 + 3} \quad (\text{等号の成立は } s = 2 \text{ のとき})$$

であるから求める最小値は $\frac{4}{3}$ $\cdots \text{答}$

