

①

$P(x_0, y_0)$, $l: ax + by + c = 0$ とする。

点 P を通り, l に直交する直線を l' とし, l と l' の交点を $H(X, Y)$ とすると,

点 P と直線 l の距離は,

$$PH = \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2} \quad (= D \text{ とする})$$

で与えられ, また l' の方程式は,

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$$

で与えられる。

さて, H は l , l' 上にあるから,

$$aX + bY + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b(X - x_0) - a(Y - y_0) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。①より,

$$a(X - x_0) + b(Y - y_0) = d \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$(d = -ax_0 - by_0 - c)$$

として $a \neq 0$ の条件下で①', ②を解く。②より,

$$Y - y_0 = \frac{b}{a}(X - x_0)$$

これを①'へ代入すると,

$$a(X - x_0) + b \cdot \frac{b}{a}(X - x_0) = d$$

$$\Leftrightarrow X - x_0 = \frac{ad}{a^2 + b^2}$$

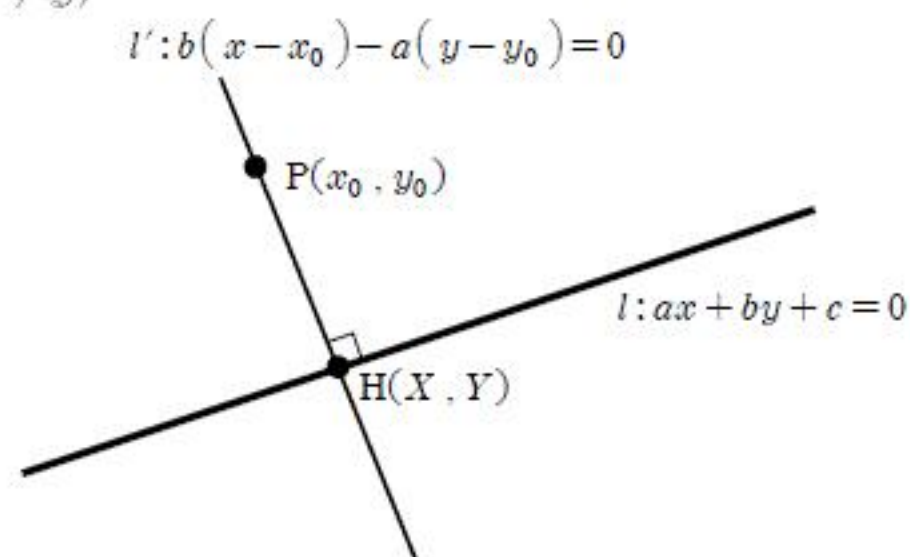
$$\text{よって, } Y - y_0 = \frac{bd}{a^2 + b^2}$$

以上より,

$$D = \sqrt{\left(\frac{ad}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{bd}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$= \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{この結果は } a = 0 \text{ でも成立する。}) \quad \cdots \text{証明終わり}$$



2

a, b, c は全て 1 以上 6 以下の自然数である。

$$(1) \log_{\frac{1}{4}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{\frac{1}{2}}(a+b)}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} > \log_{\frac{1}{2}} c$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}} c^2$$

$$\Leftrightarrow a+b < c^2$$

ここで $a+b \geq c^2$ を満たす (a, b, c) の組を数えると、

$c=1$ のとき、 $a+b \geq 1$ を満たす (a, b) の組は 36 組

$c=2$ のとき、 $a+b \geq 4$ を満たす (a, b) の組は 33 組

$c=3$ のとき、 $a+b \geq 9$ を満たす (a, b) の組は 10 組

$c=4$ のとき、 $a+b \geq 16$ を満たす (a, b) の組は 0 組

$c=5$ のとき、 $a+b \geq 25$ を満たす (a, b) の組は 0 組

$c=6$ のとき、 $a+b \geq 36$ を満たす (a, b) の組は 0 組

以上より $a+b < c^2$ を満たす確率は、

$$1 - \frac{36+33+10}{6^3} = \frac{137}{216} \quad \dots \text{答}$$

a と b の和

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) 2^a を 3 で割ったときの余り d は右の表のようになる。

よって、 $2^a + 2^b + 2^c$ が 3 で割り切れるための条件は、

a, b, c の偶奇が全て一致する場合

であるから、求める確率は、

$$\frac{3^3 \cdot 2}{6^3} = \frac{1}{4} \quad \dots \text{答}$$

a	1	2	3	4	5	6
2^a	2	4	8	16	32	64
d	2	1	2	1	2	1

3

曲線の方程式は,

$$y = \begin{cases} (x-1)^2 + 3 & (x \geq 0) \\ (x+2)^2 & (x \leq 0) \end{cases}$$

であり, グラフは右のようになる。

$$(x-1)^2 + 3 = mx + 4$$

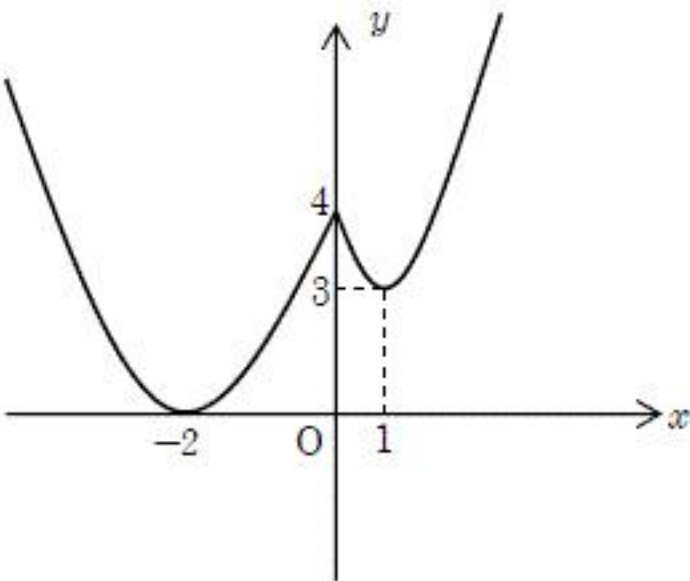
$$\Leftrightarrow x = 0, m+2$$

$$(x+2)^2 = mx + 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0, m-4$$

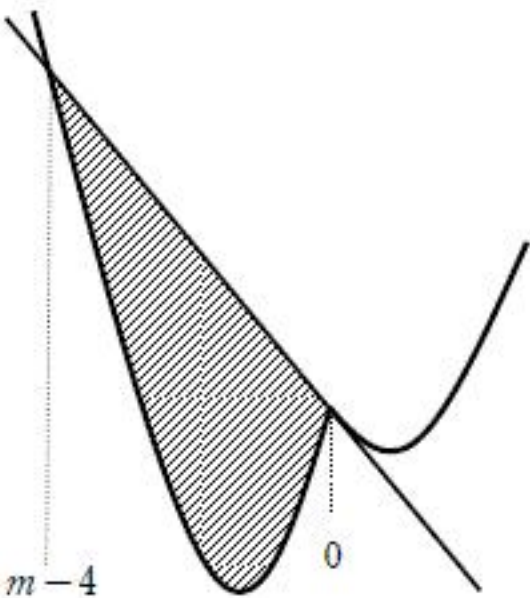
であるので, 以下の 3 タイプに分類できる。

また, 囲まれる部分の面積を S とする。



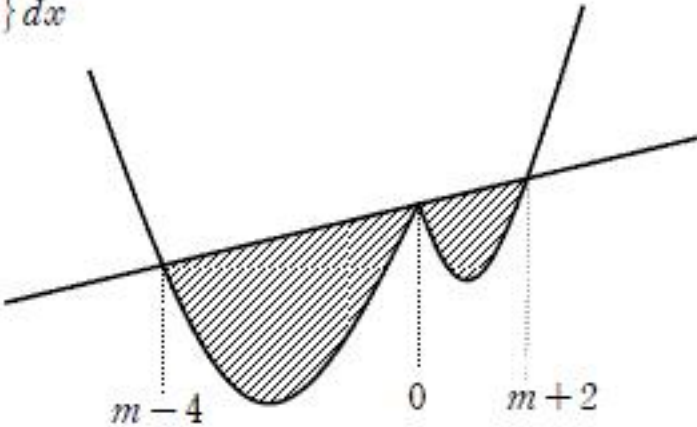
(i) $m \leq -2$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \int_{m-4}^0 \{ mx + 4 - (x+2)^2 \} dx \\ &= \int_0^{m-4} x \{ x - (m-4) \} dx \\ &= \frac{1}{6} (4-m)^3 \end{aligned}$$



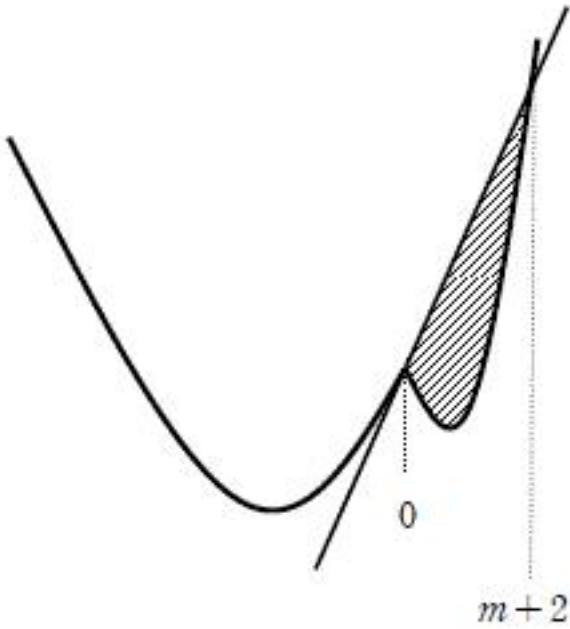
(ii) $-2 \leq m \leq 4$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \int_{m-4}^0 \{ mx + 4 - (x+2)^2 \} dx + \int_0^{m+2} \{ mx + 4 - (x-1)^2 - 3 \} dx \\ &= \int_0^{m-4} x \{ x - (m-4) \} dx - \int_0^{m+2} x \{ x - (m+2) \} dx \\ &= \frac{1}{6} (4-m)^3 + \frac{1}{6} (m+2)^3 \\ &= 3m^2 - 6m + 12 \\ &= 3(m-1)^2 + 9 \end{aligned}$$



(iii) $4 \leq m$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{m+2} \{ mx + 4 - (x-1)^2 - 3 \} dx \\ &= - \int_0^{m+2} x \{ x - (m+2) \} dx \\ &= \frac{1}{6} (m+2)^3 \end{aligned}$$



以上より S は $m \leq -2$, $4 \leq m$ ではそれぞれ

m の減少関数, m の増加関数であるから,

S の最小値は $-2 \leq m \leq 4$ で考えれば十分である。

よって(ii)より S は

$$m = 1 \quad \cdots \text{答}$$

で最小となる。