

①

まずは次の不等式を証明する。

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ において } \sin x < x < \tan x \text{ を満たす } \cdots \textcircled{1}$$

右図において、3つの図形の面積の大小関係より、

$$\triangle OPQ < \text{扇形 } OPQ < \triangle OPR$$

が成立するから、

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

を満たす。以上より①は成立する。

すると①から、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において、

$$\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

より $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ が成立するので、 $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$ とではさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が成立する。

次に $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}$ の計算を行う。 $x = -y$ とすると $0 < y < \frac{\pi}{2}$ であり、

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{-y \rightarrow -0} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

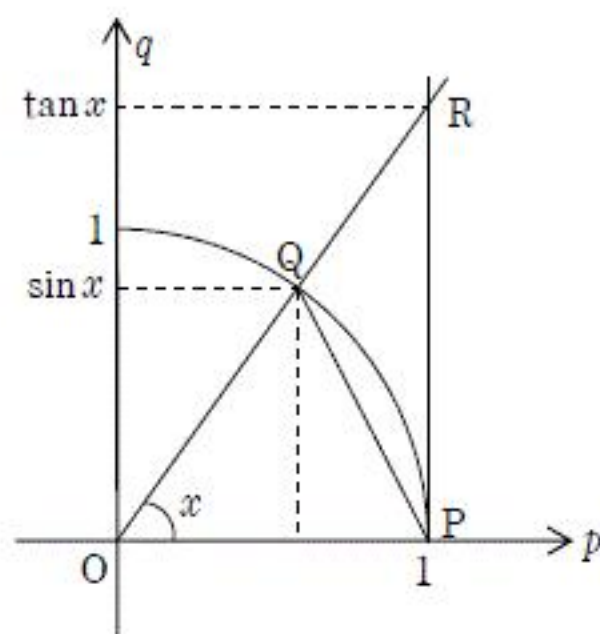
だから、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

である。

次に $h(x) = \sin x$ について、 $h'(x) = \cos x$ であることを示す。

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \left(x + \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \right\} - \sin \left\{ \left(x + \frac{h}{2} \right) - \frac{h}{2} \right\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \quad \cdots \text{証明終わり} \end{aligned}$$



$$f(x, y) = ||x| - 2| + ||y| - 2|$$

$$1 \leq f(x, y) \leq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(x, y)$ について、任意の実数 x, y に対して $f(\pm x, \pm y) = f(x, y)$ (複号任意) が成立するから、 $\textcircled{1}$ の表す領域は x 軸、 y 軸に関して対称である。

そこで $x \geq 0, y \geq 0$ で考えると、 $\textcircled{1}$ は、

$$1 \leq |x - 2| + |y - 2| \leq 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。これは、

$$x \geq 2, y \geq 2 \text{ のとき, } 5 \leq x + y \leq 7$$

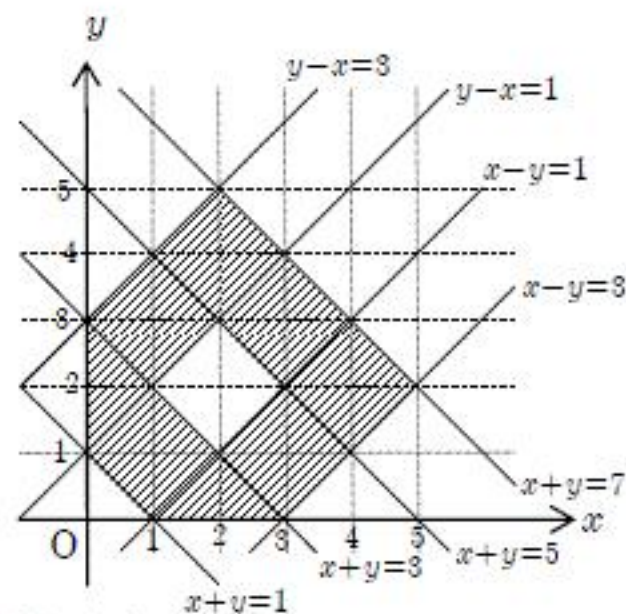
$$x \geq 2, y \leq 2 \text{ のとき, } 1 \leq x - y \leq 3$$

$$x \leq 2, y \geq 2 \text{ のとき, } 1 \leq y - x \leq 3$$

$$x \leq 2, y \leq 2 \text{ のとき, } 1 \leq x + y \leq 3$$

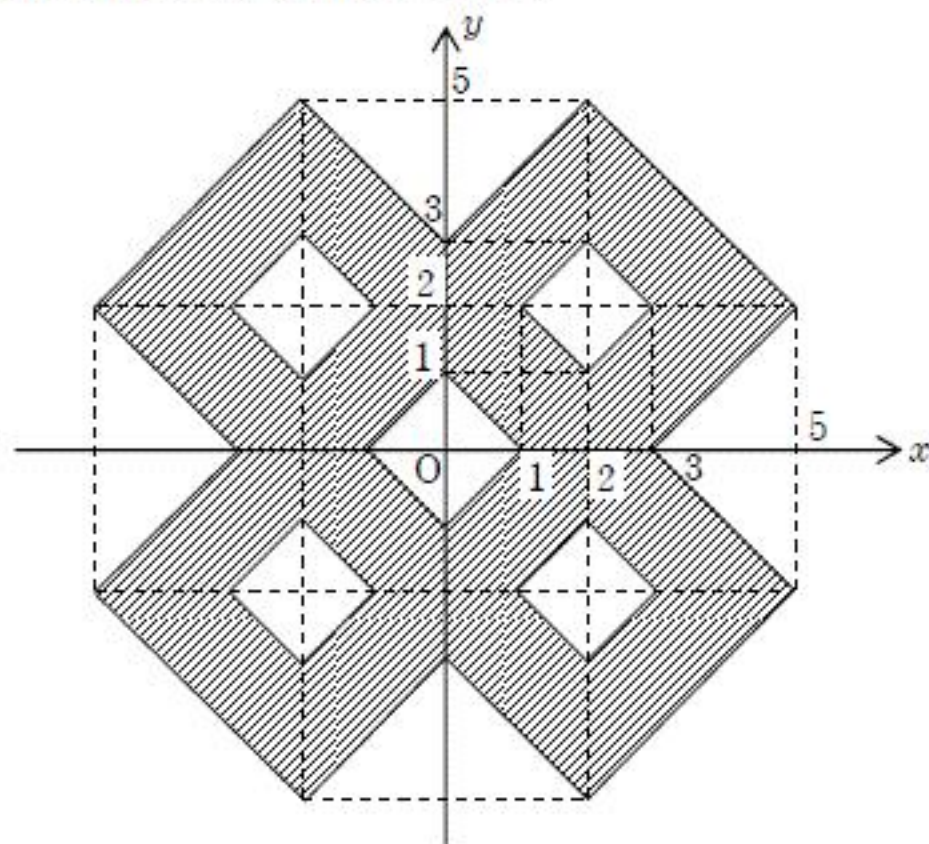
となるから右図のようになる。

(図の斜線部分、境界は全て含む)



以上より対称性も含めて $\textcircled{1}$ を図示すると下のようになる。

(図の斜線部分、境界は全て含む)



③

$$n+1, n^3+3, n^5+5, n^7+7 \cdots \textcircled{1}$$

について、 n が自然数のとき、 $2 \leq n+1 < n^3+3 < n^5+5 < n^7+7$ を満たす。

n が奇数のとき、①は全て異なる偶数となるから①の全てが素数になることはない。

n が偶数のとき、 l を1以上の自然数として、

(i) $n=6l-4$ のとき、

$$n+1=3(2l-1)$$

は $l \geq 2$ のとき素数ではない。

$l=1$ のときは、

$$n^7+7=2^7+7=135$$

が素数ではない。

(ii) $n=6l-2$ のとき、

$$n^5+5=\{(6l-3)+1\}^5+5$$

$$= {}_5C_0(6l-3)^5 + {}_5C_1(6l-3)^4 + {}_5C_2(6l-3)^3$$

$$+ {}_5C_3(6l-3)^2 + {}_5C_4(6l-3)^1 + 1 + 5$$

$$= 3M+6 \quad (M \text{ は自然数})$$

$$= 3(M+2)$$

は素数ではない。

(iii) $n=6l$ のとき、

$$n^3+3=3(72l^3+1)$$

は素数ではない。

以上より①が全て素数となるような正の整数 n は存在しない。 …証明終わり

4

条件を満たす円錐側面の点 (X, Y, Z) を考える。 $(X \geq 0)$

$$\vec{u} = (X, Y, Z) \quad (|\vec{u}| \neq 0 \text{ とする})$$

$$\vec{v} = (1, 0, 0) \quad (x \text{ 軸方向の単位ベクトル})$$

とすると、 $\vec{u}$, $\vec{v}$ のなす角は 45° だから、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow X = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2X^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$\Leftrightarrow X^2 - Z^2 = Y^2$$

よって円錐 V 上の点は、

$$x^2 - z^2 = y^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

で与えられる。これで $y = k \ (-1 \leq k \leq 1)$ としたものは、

$$x^2 - z^2 = k^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq k \leq 1$$

となり、これを xz 平面で図示したものが右図($k > 0$ のときの図)

である。(双曲線の一部)

これは円錐 V を平面 $y = k \ (-1 \leq k \leq 1)$ で切ったときの切り口を

xz 平面に正射影したものである。

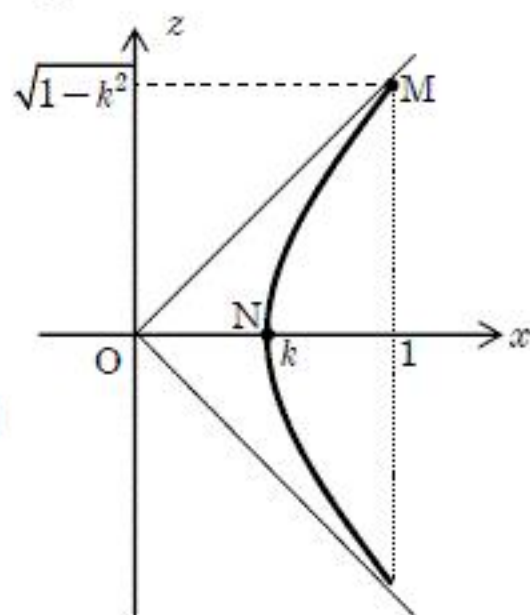
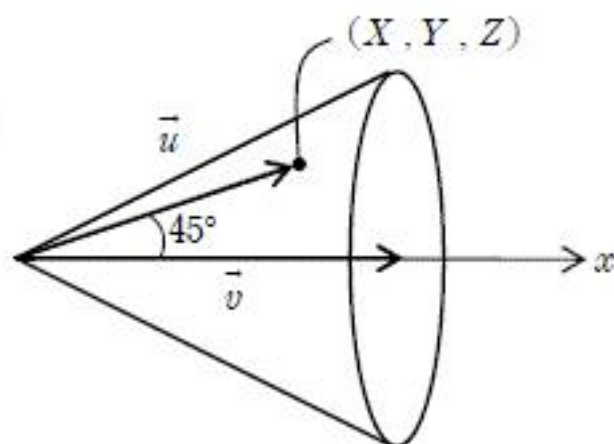
xz 平面上でこの双曲線の一部と $x = 1$ で囲まれた図形を O を中心として 1 回転させたときにできる
通過領域の面積が、回転体を平面 $y = k$ で切ったときの切り口の面積に等しい。

その面積を $S(k)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi (OM^2 - ON^2) \\ &= \pi \left\{ \left((\sqrt{1-k^2})^2 + 1^2 \right) - k^2 \right\} \\ &= 2\pi (1 - k^2) \end{aligned}$$

よって求める体積は、

$$2 \int_0^1 S(k) dk = 4\pi \int_0^1 (1 - k^2) dk = 4\pi \left[k - \frac{1}{3}k^3 \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3} \quad \dots \text{答}$$



⑤

(1) 球 K_n が入る箱が H_1 でも H_n でもないと仮定する。すると、

球 K_n は箱 H_l ($2 \leq l \leq n-1$) に入る。

しかし、球 K_l をいずれかの箱に入れる順番において、

- ・箱 H_l が空なら箱 H_l に入れる
- ・箱 H_l が空でなければそれ以外の空き箱に入れる

のいずれかを行う。いずれの場合であっても球 K_n をいずれかの

箱に入れる順番までに箱 H_l は空では無くなるはずであるが、これは矛盾する。

以上から球 K_n が入る箱は H_1 または H_n である。 …証明終わり

(2) (1)の結果を考慮すると、球 K_{n-2} を入れ終わった時点で次の3通りのいずれかが成立している。

(i) 球 $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ が箱 $H_2, H_3, \dots, H_{n-2}, H_n$ に入る

(空箱は H_1, H_{n-1} の2つ)

(ii) 球 $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ が箱 $H_2, H_3, \dots, H_{n-1}$ に入る

(空箱は H_1, H_n の2つ)

(iii) 球 $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ が箱 $H_1, H_2, \dots, H_{n-2}$ に入る

(空箱は H_{n-1}, H_n の2つ)

(i), (ii), (iii)となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n としたとき、

$$p_n + q_n + r_n = 1 \quad (n=3, 4, 5, \dots)$$

を満たし、求める確率は、

$$p_n \cdot 1 + 0 \cdot q_n + r_n \cdot 1 = p_n + r_n = 1 - q_n$$

であるから、これ以降、 q_n を求めることにする。

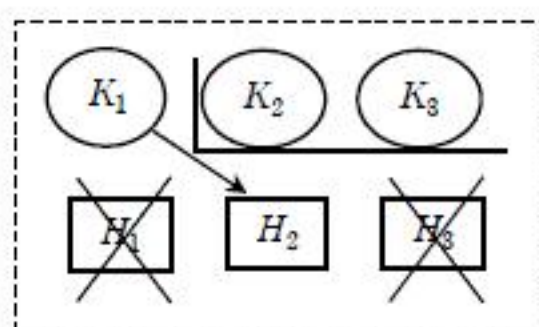
$$q_n = \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

が $n=3, 4, 5, \dots$ で成立することを数学的帰納法で証明する。

(ア) $n=3$ のとき、

球 K_1 は箱 H_2 に入るしかなく、その確率は、

$$q_3 = \frac{1}{3}$$

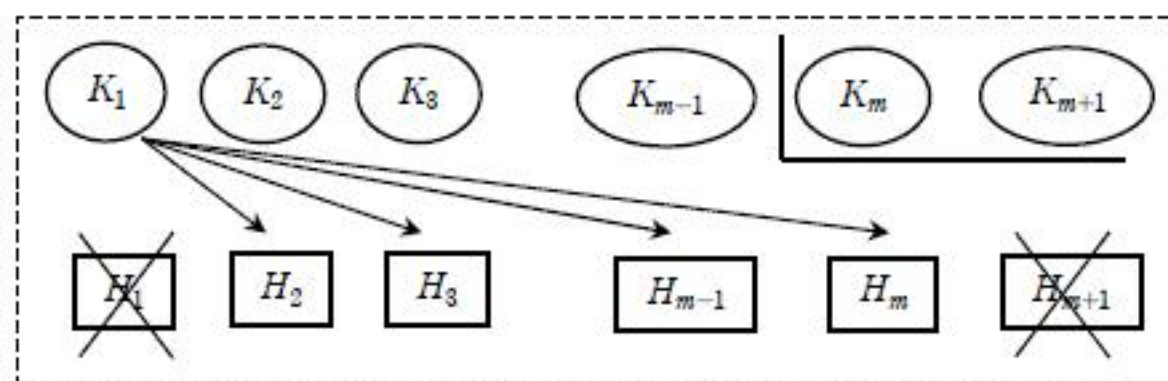


(イ) $n=3, 4, 5, \dots, m$ (m は3以上の自然数)

のとき、①が成立すると仮定する。つまり、

$$q_3 = q_4 = \dots = q_m = \frac{1}{3}$$

q_{m+1} について、



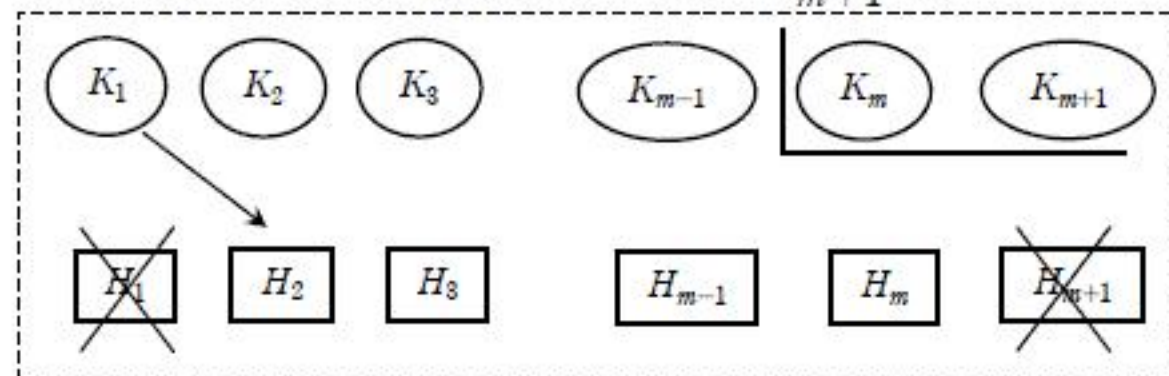
これは、

球 $K_1, K_2, \dots, K_{m-1}$ が箱 $H_2, H_3, \dots, H_m$ に入る確率

なので、これを球 K_1 が入る箱 ($H_2, H_3, \dots, H_m$) で場合分けをして、事象の分割を行うと、

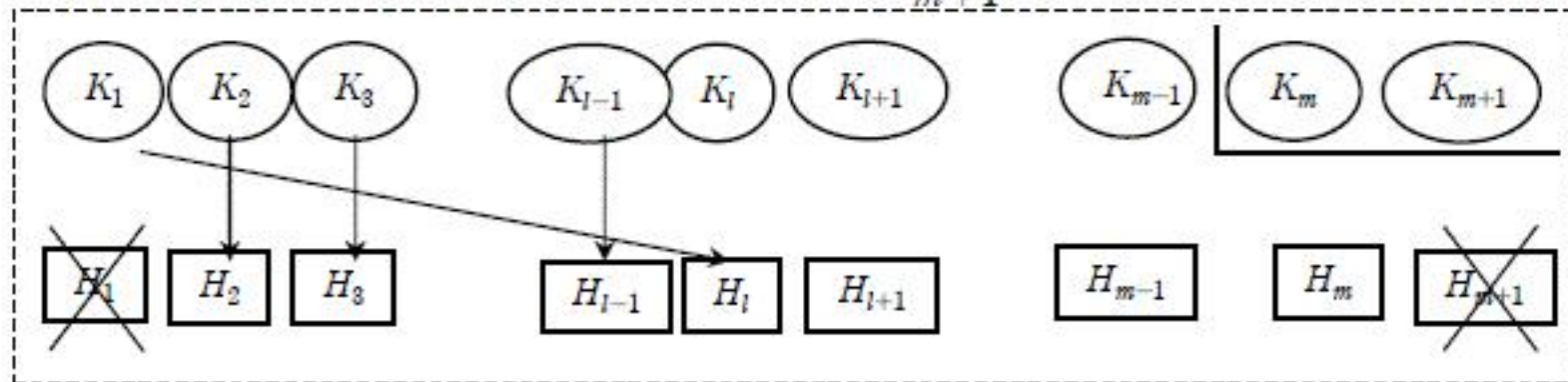
・球 K_1 が箱 H_2 に入り、

球 K_2 から球 K_{m-1} が箱 H_1 , 箱 H_{m+1} 以外に入る確率は $\frac{1}{m+1} \cdot q_m$



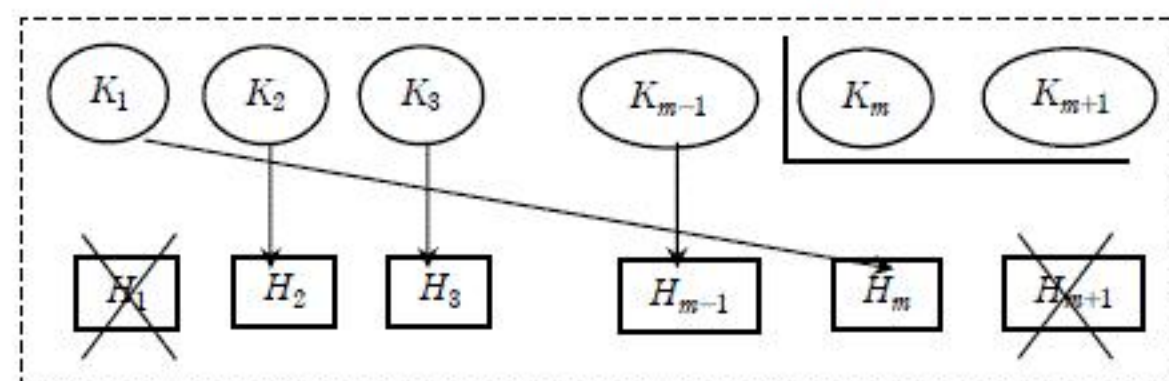
・球 K_1 が箱 H_l ($3 \leq l \leq m-1$) に入り、

球 K_2 から球 K_{m-1} が箱 H_1 , 箱 H_{m+1} 以外に入る確率は $\frac{1}{m+1} \cdot 1^{l-2} \cdot q_{m-l+2}$ ($3 \leq m-l+2 \leq m-1$)



・球 K_1 が箱 H_m に入り、

球 K_2 から球 K_{m-1} が箱 H_1 , 箱 H_{m+1} 以外に入る確率は $\frac{1}{m+1} \cdot 1^{m-2} \cdot 1$



よって、

$$\begin{aligned} q_{m+1} &= \frac{1}{m+1} q_m + \sum_{l=3}^{m-1} \frac{1}{m+1} q_{m-l+2} + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{3} + \sum_{l=3}^{m-1} \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(m-3) + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

以上より①は $n=3, 4, 5, \dots$ で成立する。

従って求める確率は、

$$1 - q_n = \frac{2}{3} \quad \dots \text{答}$$