

①

$$(a+bi)(x+yi) = ax - by + (ay + bx)i$$

$$a^2 + b^2 > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) $L_1: ax - by = 2$, $L_2: ay + bx = -3$ となり, ①より a, b は同時に 0 になることはないから, L_1, L_2 は共に直線である。…証明終わり

(2) L_1 の法線ベクトルの 1 つを $\vec{l}_1$, L_2 の法線ベクトルの 1 つを $\vec{l}_2$ とすると,

$$\vec{l}_1 = (a, -b), \quad \vec{l}_2 = (b, a)$$

である。このとき①より $|\vec{l}_1| = |\vec{l}_2| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ であり,

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = ab - ba = 0$$

なので L_1 と L_2 の法線ベクトルは互いに垂直だから, L_1 と L_2 も互いに垂直である。…証明終わり

(3) $by = ax - 2 \quad \cdots \textcircled{2} \quad ay + bx = -3 \quad \cdots \textcircled{3}$ とする。

(i) $b = 0$ のとき, $a \neq 0$ であり,

$$\textcircled{2} \text{ より } ax = 2 \text{ から } x = \frac{2}{a}$$

$$\textcircled{3} \text{ より } ay = -3 \text{ から } y = \frac{-3}{a}$$

よって, L_1 と L_2 の交点は $\left(\frac{2}{a}, -\frac{3}{a}\right)$

(ii) $b \neq 0$ のとき, ②より $y = \frac{ax-2}{b}$

これを③へ代入して,

$$a \frac{ax-2}{b} + bx = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2a-3b}{a^2+b^2}$$

したがって②より,

$$y = \frac{1}{b} \left(a \frac{2a-3b}{a^2+b^2} - 2 \right) = \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}$$

よって, L_1 と L_2 の交点は $\left(\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$

以上より, b の値によらず, L_1 と L_2 の交点は $\left(\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$ …答

[2]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} &= \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} \\
 &= \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\cos \frac{x+y}{2}} \\
 &= \tan \frac{x+y}{2}
 \end{aligned}$$

より与えられた等式は成立する。 …証明終わり

※式の変形に次の関係式を利用した。

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$$

(2) 成り立たない。反例は $x=0$, $y=z=\frac{\pi}{2}$ のとき。このとき,

$$\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0$$

であるが,

$$\tan \frac{x+y+z}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z} = \frac{0+1+1}{1+0+0} = 2$$

からこれらは一致しない。 …答

③

$f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ について

$$f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$$

$x=0$ で極大値 M , $x=\alpha$ で極小値 m をとるので,

$$f'(0) = f'(\alpha) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(0) = M \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$f(\alpha) = m \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。①より,

$$r = 3p\alpha^2 + 2q\alpha + r = 0$$

から, $\alpha \neq 0$ とで,

$$r = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$2q = -3p\alpha \quad \cdots \textcircled{5}$$

次に②より,

$$s = M$$

③より,

$$m = p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s$$

これに④, ⑤を代入して,

$$m = p\alpha^3 - \frac{3}{2}p\alpha^3 + M$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2(M-m)}{\alpha^3}$$

よって⑤から,

$$\begin{aligned} q &= -\frac{3}{2}p\alpha \\ &= -\frac{3(M-m)}{\alpha^2} \end{aligned}$$

以上から,

$$p = \frac{2(M-m)}{\alpha^3}, \quad q = -\frac{3(M-m)}{\alpha^2}, \quad r = 0, \quad s = M \quad \cdots \text{答}$$