

①

$$s\overline{OA} + t\overline{OB} = \overline{OC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} as + ct = e & \cdots ① \\ bs + dt = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

について、①× d −②× c の計算から、

$$(ad - bc)s = de \quad \cdots ③$$

②× a −①× b の計算から、

$$(ad - bc)t = -be \quad \cdots ④$$

よって③、④を満たす実数の組 s, t の存在条件を考える。

(i) $ad - bc \neq 0$ のとき、③、④から

$$s = \frac{de}{ad - bc}, \quad t = -\frac{be}{ad - bc}$$

が存在する。

(ii) $ad - bc = 0$ のとき、③、④から

$$0 \cdot s = de$$

$$0 \cdot t = -be$$

よりこれらを満たす実数 s, t の存在条件は、

$$de = be = 0$$

より、

$$e = 0 \quad \text{または} \quad d = b = 0$$

である。

$e = 0$ のとき、①、②は $s = t = 0$ を解にもつ。(i)の場合でも成立する)

$d = b = 0$ のとき $ad - bc = 0$ は成立する。

以上より求める必要十分条件は、

$$ad - bc \neq 0 \quad \text{または} \quad e = 0 \quad \text{または} \quad b = d = 0 \quad \cdots \text{答}$$

$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}t - x - 1 + f(t)$ とおく。このとき、問いの条件(ア)かつ(イ)と同値な条件は、

x の関数 $g(x)$ の最小値が 0 であることである。以下、関数 $g(x)$ の増減を調べる。

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}t - 1 \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}t - 1 \\ &= \frac{t}{2e^x} \left(e^{2x} - \frac{2}{t}e^x - 1 \right) \\ &= \frac{t}{2e^x} \left(e^x - \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \right) \left(e^x - \frac{1 - \sqrt{1+t^2}}{t} \right) \end{aligned}$$

$t > 0$ のとき、 $\frac{1 - \sqrt{1+t^2}}{t} < 0 < \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t}$ であるから、

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \\ &\Leftrightarrow x = \log \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	x_t	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

この x の値を x_t とすると、関数 $g(x)$ の増減は右のようになる。

よって、関数 $g(x)$ は $x = x_t$ で極小かつ最小である。最小値は、

$$g(x_t) = \frac{e^{x_t} + e^{-x_t}}{2}t - x_t - 1 + f(t)$$

だから、 $g(x_t) = 0$ とすることで、

$$f(t) = -\frac{e^{x_t} + e^{-x_t}}{2}t + x_t + 1$$

$$= -\frac{t}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} + \frac{t}{1 + \sqrt{1+t^2}} \right) + \log \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} + 1$$

$$= -\frac{t}{2} \cdot \frac{(1 + \sqrt{1+t^2})^2 + t^2}{t(1 + \sqrt{1+t^2})} + \log \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} + 1$$

$$= -\frac{2(1 + \sqrt{1+t^2} + t^2)}{2(1 + \sqrt{1+t^2})} + \log \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} + 1$$

$$= -\frac{\sqrt{1+t^2}(1 + \sqrt{1+t^2})}{1 + \sqrt{1+t^2}} + \log \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} + 1$$

$$= 1 - \sqrt{1+t^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t} \quad \cdots \text{答}$$

3

$$T = \sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$S = \int_1^{40000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

とする。 $k \geq 2$ のとき、 $k-1 \leq x \leq k$ であれば $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}}$ が成立し、

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{k}} dx < \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{k-1}} dx$$

つまり、 $\frac{1}{\sqrt{k}} < \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{k-1}}$ が成立する。 …①

①で $k = 2, 3, 4, \dots, 40000$ としたものの和をとることで、

$$\sum_{k=2}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_1^{40000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=2}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

が成立する。

$$(\text{最左辺}) = \sum_{k=2}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1$$

$$(\text{最右辺}) = \sum_{k=2}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{39999} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{40000}}$$

から、 $T - 1 < S < T - \frac{1}{200}$ が成立し、

$$S = \left[2\sqrt{x} \right]_1^{40000}$$

$$= 2 \cdot 200 - 2$$

$$= 398$$

から $398 + \frac{1}{200} < T < 399$ が成立するので、 T の整数部分は 398 …答

④

(1) 球 S_k の中心を $O_k (k=1, 2)$, 球 T_i の中心を $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ とする。

また, 2 つの球 S_1, S_2 の接点を Q とする。このとき, Q は線分 O_1O_2 の中点である。

このとき, 3 点 O_1, O_2, P_1 を通る平面による立体図形の切り口(一部)は下図のようになる。

直角三角形 O_1P_1Q について,

$$\begin{aligned} QP_1^2 &= O_1P_1^2 - O_1Q^2 \\ &= (1+r_n)^2 - 1^2 \\ &= r_n^2 + 2r_n \end{aligned}$$

が成立するから, 図形の対称性より,

$$QP_i = \sqrt{r_n^2 + 2r_n} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

である。以下, $\sqrt{r_n^2 + 2r_n} = d_n$ とする。

次に, 3 点 P_1, P_2, Q を通る平面による立体図形の切り口(一部)は下図のようになる。

$\angle P_1QP_2 = 2\theta$ とすると, $\theta = \frac{\pi}{n}$ であり, 三角形 P_1P_2Q について余弦定理より,

$$\begin{aligned} (2r_n)^2 &= d_n^2 + d_n^2 - 2d_n^2 \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow 4r_n^2 &= 2d_n^2 - 2d_n^2 \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow 4r_n^2 &= 2(r_n^2 + 2r_n)(1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r_n = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad (r_n \neq 0 \text{ より})$$

よって,

$$\begin{aligned} r_n &= 2 \cdot \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= 2 \tan^2 \theta \\ &= 2 \tan^2 \frac{\pi}{n} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(2) V_n は右図の円板

$$x^2 + (y - d_n)^2 \leq r_n^2$$

を x 軸に関して 1 回転してできる立体(トーラス)の体積に一致する。

$$x^2 + (y - d_n)^2 = r_n^2$$

$$\Leftrightarrow y = d_n \pm \sqrt{r_n^2 - x^2}$$

から,

$$\begin{aligned} V_n &= 2\pi \int_0^{r_n} \left\{ \left(d_n + \sqrt{r_n^2 - x^2} \right)^2 - \left(d_n - \sqrt{r_n^2 - x^2} \right)^2 \right\} dx \\ &= 8\pi d_n \int_0^{r_n} \sqrt{r_n^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

ここで $\int_0^{r_n} \sqrt{r_n^2 - x^2} dx$ は下図の斜線部分の面積に一致し,

$$\frac{1}{4} \cdot \pi r_n^2$$

であるから,

$$\begin{aligned} V_n &= 8\pi d_n \cdot \frac{1}{4} \pi r_n^2 \\ &= 2\pi^2 d_n r_n^2 \end{aligned}$$

また,

$$W_n = n \cdot \frac{4}{3} \pi r_n^3$$

よって,

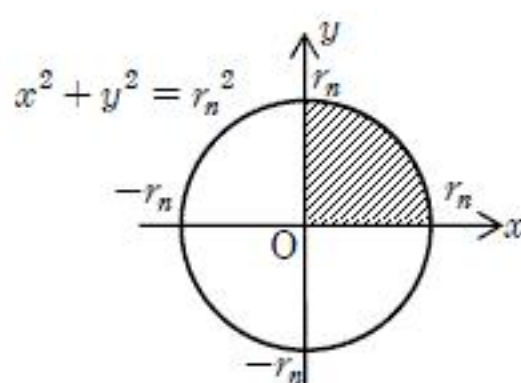
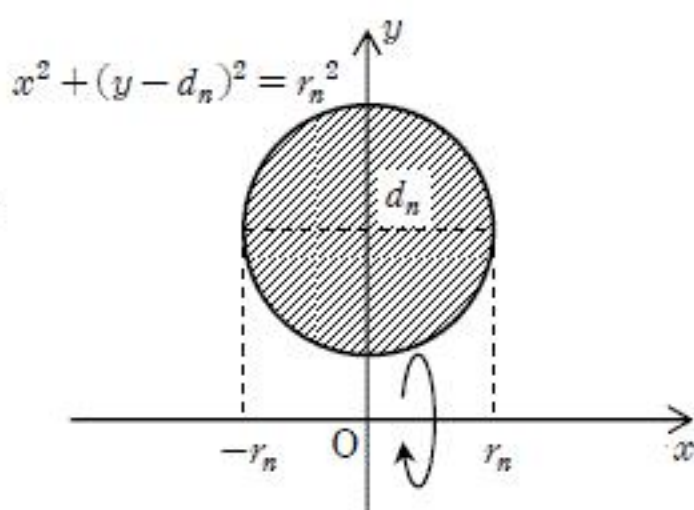
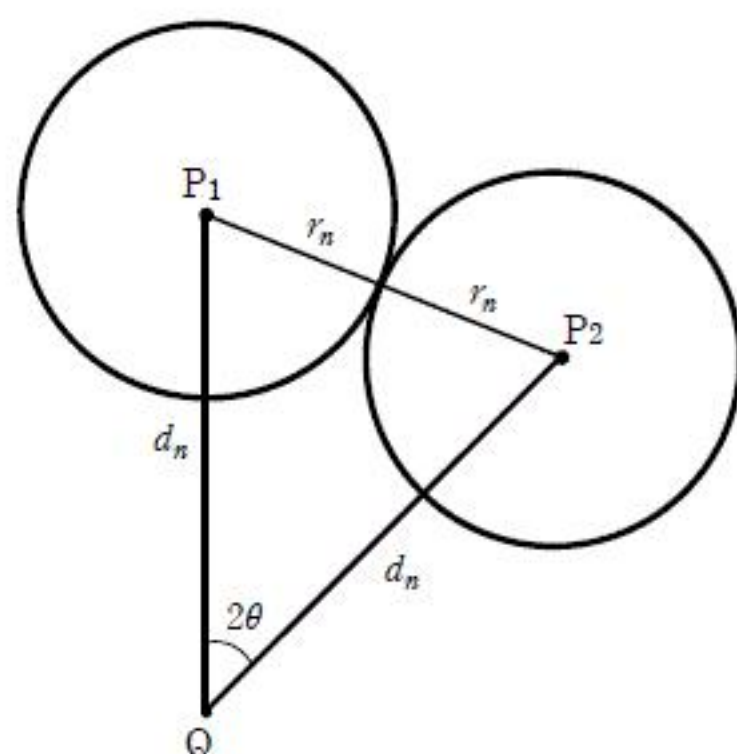
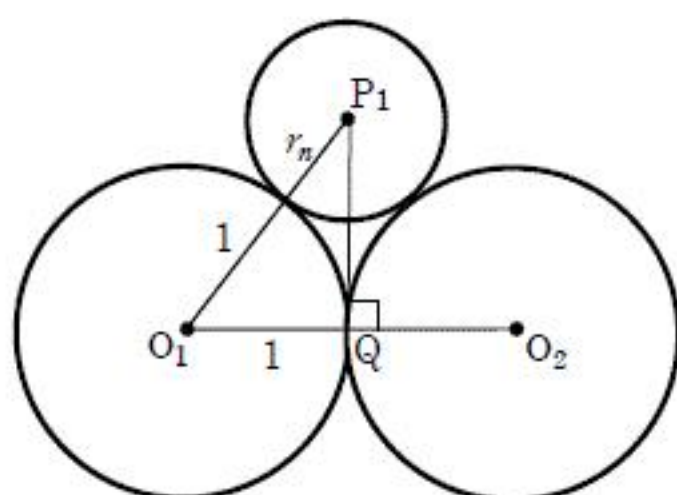
$$\begin{aligned} \frac{W_n}{V_n} &= \frac{n \cdot \frac{4}{3} \pi r_n^3}{2\pi^2 d_n r_n^2} \\ &= \frac{2nr_n}{3\pi d_n} \\ &= \frac{2nr_n}{3\pi \sqrt{r_n^2 + 2r_n}} \\ &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{\frac{n^2 r_n^2}{r_n^2 + 2r_n}} \\ &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{\frac{n^2 r_n}{r_n + 2}} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \frac{n^2 r_n}{r_n + 2} &= \frac{n^2 \cdot 2 \tan^2 \theta}{2 \tan^2 \theta + 2} \\ &= n^2 \tan^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \\ &= n^2 \sin^2 \theta \\ &= n^2 \cdot \theta^2 \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \\ &= \pi^2 \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \quad \left(\theta = \frac{\pi}{n} \text{ より} \right) \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{V_n} &= \frac{2}{3\pi} \sqrt{\pi^2 \cdot 1^2} \\ &= \frac{2}{3} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$



5

T_n を 5 で割った余りが 0 である確率を s_n とする。このとき下の表から、次の漸化式が成立する

$$p_{n+1} = \frac{2}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{n+1} = \frac{3}{6} p_n + \frac{4}{6} q_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} q_n + s_n$$

$$p_1 = \frac{2}{6}, \quad q_1 = \frac{3}{6}, \quad s_1 = \frac{1}{6}$$

(計算上、 s_n は不要であるが、残しておく)

(1) ①+②より、

$$p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{5}{6} (p_n + q_n)$$

が成立する。よって数列 $\{p_n + q_n\}$ は公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列なので、

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= (p_1 + q_1) \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{5}{6} \right)^n \quad \cdots \text{答} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

※ 任意の n で $p_n + q_n + s_n = 1$ であり、 $1 - s_n$ は n 回とも 5 の目が出ない確率なので、

$$1 - s_n = \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

 よって、

$$p_n + q_n = 1 - s_n = \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

 と出せる。この結果は始めに作った 3 つ目の漸化式からも得られる。

(2) ①と③から q_n を消去することで、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{6} p_n + \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^n - p_n \right\} \\ &= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^n \quad \cdots \text{答} \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

(3) ④の両辺に $\left(\frac{6}{5} \right)^{n+1}$ をかけると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5} \right)^{n+1} p_{n+1} &= \frac{1}{6} \left(\frac{6}{5} \right)^{n+1} p_n + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^n \left(\frac{6}{5} \right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5} \right)^{n+1} p_{n+1} &= \frac{1}{5} \left(\frac{6}{5} \right)^n p_n + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{6}{5} \right)^n p_n = r_n \text{ より,}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{5} r_n + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow r_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \left(r_n - \frac{1}{4} \right)$$

よって数列 $\left\{ r_n - \frac{1}{4} \right\}$ は公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列だから、

$$r_n - \frac{1}{4} = \left(r_1 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

$$r_1 = \frac{6}{5} p_1 = \frac{2}{5} \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{5}{6} \right)^n r_n \\ &= \left(\frac{5}{6} \right)^n \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^n + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6} \right)^n \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

縦の数と横の数の積を5で割った余りの表

$\backslash$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	0	1
2	2	4	1	3	0	2
3	3	1	4	2	0	3
4	4	3	2	1	0	4
0	0	0	0	0	0	0