

$$P = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

について、 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ より

$$x = \cos \alpha, \quad y = \cos \beta \quad (0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi)$$

とおくことができる。このとき、

$$\begin{aligned} P &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2\cos \alpha \cos \beta \sqrt{1-\cos^2 \alpha} \sqrt{1-\cos^2 \beta} \\ &= \cos^2 \alpha (1-\cos^2 \beta) + \cos^2 \beta (1-\cos^2 \alpha) + 2\cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\ &\quad (\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha| = \sin \alpha, \quad \sqrt{1-\cos^2 \beta} = \sqrt{\sin^2 \beta} = |\sin \beta| = \sin \beta) \\ &= \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\ &= (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)^2 \\ &= \sin^2 (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

が成立する。ここで $0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$ であるから

$$-1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1$$

なので、

$$0 \leq \sin^2 (\alpha + \beta) \leq 1$$

よって、

$$0 \leq P \leq 1 \quad \cdots \text{答}$$

※

$$P = (x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2})^2 + (x^2 - y^2)^2 \geq 0$$

$$1-P = (x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2})^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 \geq 0$$

である。

[2]

$$l: y = kx + m \quad (k > 0)$$

$$C_1: x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$C_2: y = -\frac{1}{2}x^2$$

について

(1) C_1 と l が接するための条件は,

C_1 の中心 $(0, 1)$ と直線 $l: kx - y + m = 0$ の距離が, 円 C_1 の半径 1 に一致することであり,

$$\frac{|k \cdot 0 - 1 + m|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 1$$

よって,

$$(m-1)^2 = k^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また C_2 と l が接するための条件は, x の 2 次方程式

$$-\frac{1}{2}x^2 = kx + m$$

つまり,

$$x^2 + 2kx + 2m = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が重解を持つことであり,

$$k^2 - 2m = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ③より k^2 を消去すると,

$$(m-1)^2 = 2m + 1$$

$$m^2 - 4m = 0$$

$$m = 0, 4$$

$m = 0$ のとき, ③より $k = 0$ となり, $k > 0$ を満たさない。

$m = 4$ のとき, ③より $k = \pm 2\sqrt{2}$ となり, $k > 0$ より $k = 2\sqrt{2}$ である。

このとき②の重解は $x = -k = -2\sqrt{2}$ である。

以上より,

$$k = 2\sqrt{2}, \quad m = 4 \quad \cdots \text{答}$$

(2) 求める面積を S とすると, 右図より,

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ 2\sqrt{2}x + 4 - \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) \right\} dx$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^0 \frac{1}{2} (x + 2\sqrt{2})^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (x + 2\sqrt{2})^3 \right]_{-2\sqrt{2}}^0$$

$$= \frac{1}{6} \{ (2\sqrt{2})^3 - 0^3 \}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad \cdots \text{答}$$



