

1

$$(1) \quad \int_0^n f_n(x) dx$$

$$= \int_0^n \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx$$

について, $\frac{x}{n} = y$ とすると $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}$,

$$\int_0^1 \frac{ny}{n(1+ny)} \log(1+y) n dy$$

$$= \int_0^1 \frac{ny}{1+ny} \log(1+y) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} \log(1+x) dx$$

よって,

$$J_n = \int_0^1 \log(1+x) dx - \int_0^1 \frac{nx}{1+nx} \log(1+x) dx$$

とおくと,

$$J_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{nx}{1+nx}\right) \log(1+x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で } \frac{1}{1+nx} > 0, \quad \log(1+x) \geq 0 \quad \text{だから } J_n \geq 0$$

よって,

$$\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx \quad \cdots \text{証明終わり}$$

(2) ①について, $0 \leq x \leq 1$ のとき $\log(1+x) \leq \log 2$ であることとて,

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log(1+x) dx$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{1+nx} \log 2 dx$$

$$= (\log 2) \int_0^1 \frac{1}{1+nx} dx$$

$$= (\log 2) \left[\frac{1}{n} \log(1+nx) \right]_0^1$$

$$= (\log 2) \frac{\log(1+n)}{n}$$

よって,

$$0 \leq J_n \leq (\log 2) \frac{\log(1+n)}{n}$$

ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+n)}{1+n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 0 \cdot (1+0)$$

$$= 0$$

だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \log(1+x) dx - I_n \right\} = 0$$

従って,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 \log(1+x) dx$$

$$= \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 (1+x) \frac{1}{1+x} dx$$

$$= 2 \log 2 - 0 - [x]_0^1$$

$$= 2 \log 2 - (1 - 0)$$

$$= 2 \log 2 - 1 \quad \cdots \text{答}$$

$$P = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

について、 $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ より

$$x = \cos \alpha, \quad y = \cos \beta \quad (0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi)$$

とおくことができる。このとき、

$$\begin{aligned} P &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2\cos \alpha \cos \beta \sqrt{1-\cos^2 \alpha} \sqrt{1-\cos^2 \beta} \\ &= \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) + 2\cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\ &\quad (\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha| = \sin \alpha, \quad \sqrt{1-\cos^2 \beta} = \sqrt{\sin^2 \beta} = |\sin \beta| = \sin \beta) \\ &= \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \\ &= (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha)^2 \\ &= \sin^2 (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

が成立する。ここで $0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$ であるから

$$-1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1$$

なので、

$$0 \leq \sin^2 (\alpha + \beta) \leq 1$$

よって、

$$0 \leq P \leq 1 \quad \dots \text{答}$$

※

$$P = \left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} \right)^2 + \left(x^2 - y^2 \right)^2 \geq 0$$

$$1 - P = \left(x\sqrt{1-x^2} - y\sqrt{1-y^2} \right)^2 + \left(x^2 + y^2 - 1 \right)^2 \geq 0$$

である。

(1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを示す。

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると、互いに素な自然数 a, b を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$$

と表せる。よって、

$$\sqrt{2}a = b$$

$$2a^2 = b^2$$

より b は偶数である。 c を自然数として $b = 2c$ と書け、

$$2a^2 = (2c)^2$$

$$a^2 = 2c^2$$

より a は偶数である。しかしこれは a, b が互いに素であることに矛盾する。

以上から $\sqrt{2}$ は無理数である。 …証明終わり

$\sqrt[3]{3}$ は無理数であることを示す。

$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると、互いに素な自然数 d, e を用いて

$$\sqrt[3]{3} = \frac{e}{d}$$

と表せる。よって、

$$\sqrt[3]{3}d = e$$

$$3d^3 = e^3$$

より e は 3 の倍数である。 f を自然数として $e = 3f$ と書け、

$$3d^3 = (3f)^3$$

$$d^3 = 9f^3$$

より d は 3 の倍数である。しかしこれは d, e が互いに素であることに矛盾する。

以上から $\sqrt[3]{3}$ は無理数である。 …証明終わり

(2) $\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q = r$ (r は有理数)

とおくと、

$$\sqrt[3]{3}q = r - \sqrt{2}p$$

両辺を 3 乗すると、

$$3q^3 = (r - \sqrt{2}p)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}p(3r^2 + 2p^2) = r^3 + 6rp^2 - 3q^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで $p(3r^2 + 2p^2) \neq 0$ とすると、

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6rp^2 - 3q^3}{p(3r^2 + 2p^2)}$$

左辺は無理数、右辺は有理数だから、これは矛盾。

よって、

$$p(3r^2 + 2p^2) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であり、①より、

$$r^3 + 6rp^2 - 3q^3 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

ここで $p \neq 0$ とすると②より $3r^2 + 2p^2 = 0$ だから $r = p = 0$ となり $p \neq 0$ に矛盾する。

よって $p = 0$ であり、このとき③より、

$$r^3 = 3q^3$$

よって、

$$r = \sqrt[3]{3}q$$

ここで $q \neq 0$ とすると $\sqrt[3]{3} = \frac{r}{q}$ となり、左辺は無理数、右辺は有理数だから、これは矛盾。

よって $q = 0$ であるから $r = 0$

以上より、

$$p = q = 0$$

である。 …証明終わり

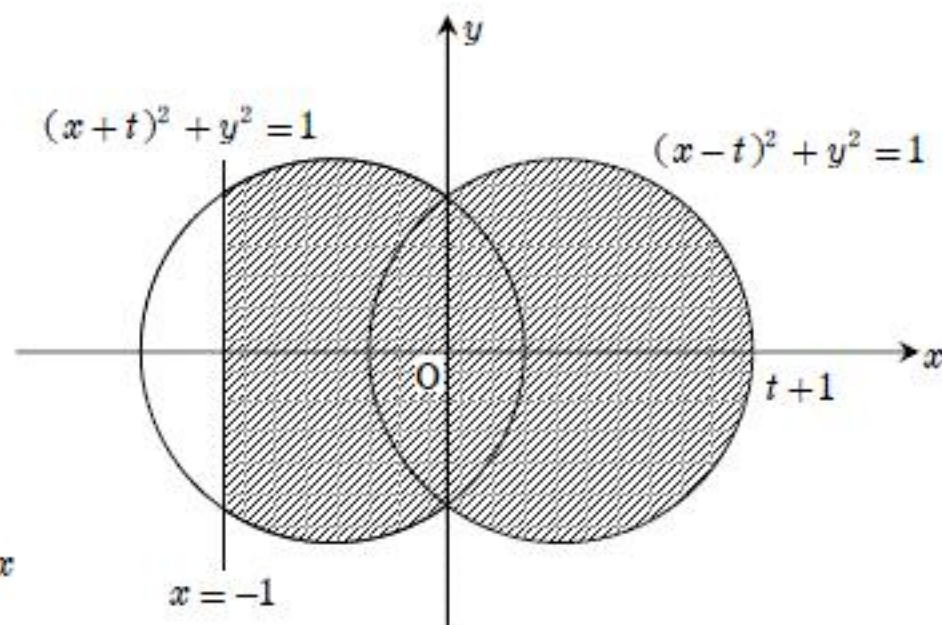
(1) 時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積は, xy 平面において,

$$(x-t)^2 + y^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(x+t)^2 + y^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x \geq -1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

としたとき, (①または②) かつ③
が表す領域(右図の斜線部分)を x 軸に
関して 1 回転してできる立体の体積に
等しい。よって,



$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_{-1}^0 \{1 - (x+t)^2\} dx \\ &\quad + \pi \int_0^{t+1} \{1 - (x-t)^2\} dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3}(x+t)^3 \right]_{-1}^0 \\ &\quad + \pi \left[x - \frac{1}{3}(x-t)^3 \right]_0^{t+1} \\ &= \pi \left\{ 0 - (-1) - \frac{1}{3} \{t^3 - (t-1)^3\} \right\} \\ &\quad + \pi \left\{ (t+1) - 0 - \frac{1}{3} \{1^3 - (-t)^3\} \right\} \\ &= \pi \left(-\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + \frac{4}{3} \right) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2)

$$V'(t) = \pi(-t^2 - 2t + 2)$$

$$= -\pi(t+1+\sqrt{3})(t+1-\sqrt{3})$$

よって $V(t)$ の増減は右のようになり,

$t = -1 + \sqrt{3}$ で極大かつ最大となる。

最大値は,

t	0	...	$-1 + \sqrt{3}$	...	1
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		↗	極大	↘	

$$V(-1 + \sqrt{3}) = \pi \left\{ -\frac{1}{3}(\sqrt{3} - 1)^3 - (\sqrt{3} - 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1) + \frac{4}{3} \right\} = \pi \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3} \right) \quad \cdots \text{答}$$

- (1) 『条件 p を満たすとき、第 n 行と第 n 列の両方に 0 と 1 が交互に現れるか、
または第 n 行と第 n 列の一方のみに 0 と 1 が交互に現れる』 …①

①が $n \geq 2$ で成立することを、 n についての数学的帰納法にて証明する。

- (i) $n = 2$ のとき、条件 p を満たす数字の入れ方は、○は 0 または 1、×は 1 から ○ の数を引いた数であるとして次の 3 つの形があり、①は成立する。

○	×
×	○

×	○
×	○

○	○
×	×

- (ii) $n = k (k \geq 2)$ のとき、①が成立すると仮定する。このとき、 $k \times k$ のマスで
第 k 行と第 k 列の両方に 0 と 1 が交互に現れるものを P_k 、
第 k 行と第 k 列の一方のみに 0 と 1 が交互に現れるものを Q_k とする。

- (ア) P_k に対して第 $k+1$ 行と第 $k+1$ 列に条件 p を満たすように数字を入れると、
次の 3 通りのいずれかの形になる。(交互に並んでいる行または列に矢印を入れている)

				k 列
			×	○
			○	×
			×	○
k 行	×	○	×	○
	○	×	○	×

			×	○
			○	×
			×	○
×	○	×	○	×
×	○	×	○	×

			×	×
			○	○
			×	×
×	○	×	○	○
○	×	○	×	×

- (イ) Q_k に対して第 $k+1$ 行と第 $k+1$ 列に条件 p を満たすように数字を入れると、
第 k 行に 0 と 1 が交互に現れる場合は次の 2 通りのいずれかの形になる。
(第 k 列に 0 と 1 が交互に現れる場合も同様であり、第 $k+1$ 列に 0 と 1 が交互に現れる)

				k 列
			○	×
			×	○
			×	○
k 行	×	○	×	○
	○	×	○	×

			○	×
			×	○
			×	○
×	○	×	○	×
×	○	×	○	×

以上より $n = k+1$ のときも①が成立することがわかる。

従って、
条件 p を満たすとき、第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる …証明終わり

- (2) P_n 、 Q_n がそれぞれ p_n 、 q_n 通りずつあるとすると、 $a_n = p_n + q_n$ であり、

(1)の(i)より、

$$p_2 = 1 \times 2 = 2, \quad q_2 = 2 \times 2 = 4$$

また(2)より、

$$p_{n+1} = p_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$q_{n+1} = 2p_n + 2q_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立するから、②より

$$p_n = 2 \quad (n \geq 2)$$

よって③より、

$$q_{n+1} = 2q_n + 4$$

$$\Leftrightarrow q_{n+1} + 4 = 2(q_n + 4)$$

数列 $\{q_n + 4\}$ は公比 2 の等比数列であるから、

$$q_n + 4 = (q_2 + 4)2^{n-2}$$

よって、

$$q_n = 2^{n+1} - 4$$

以上から、

$$a_n = p_n + q_n = 2^{n+1} - 2 \quad \cdots \text{答}$$