

①

$y = -x^2 + bx + c = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + c + \frac{b^2}{4}$ について、

P は頂点が $\left(\frac{b}{2}, c + \frac{b^2}{4}\right)$ 、上に凸の放物線である。よって、条件から、

$$q = c + \frac{b^2}{4}$$

をみtas。さらに、 P と x 軸の交点の x 座標は、 x の 2 次方程式

$$x^2 - bx - c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

の実数解であり、①の判別式を D とすると、

$$D = b^2 + 4c = 4q > 0$$

だから①は異なる 2 つの実数解を持つ。それらを α, β ($\alpha < \beta$) とすると、

求める面積 S は、

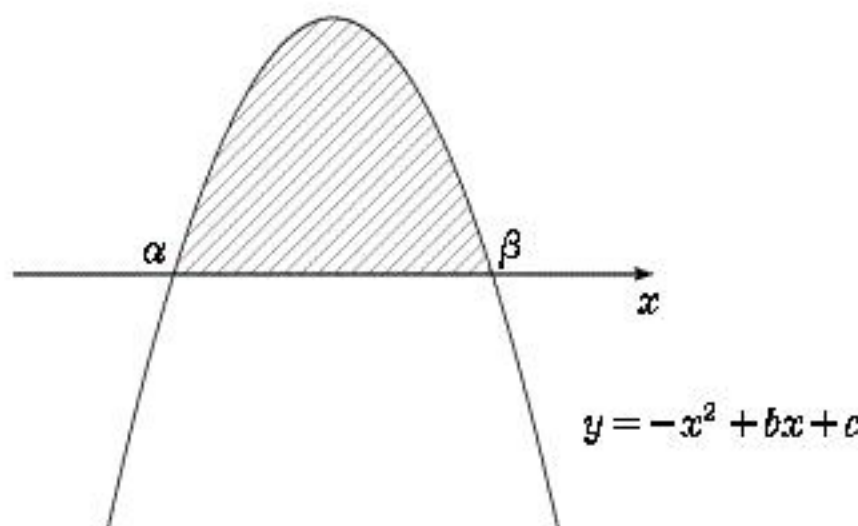
$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2 + bx + c) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

ここで①の解は $x = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2}$ だから

$$\alpha = \frac{b - \sqrt{D}}{2}, \quad \beta = \frac{b + \sqrt{D}}{2}$$

なので、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \left(\frac{b + \sqrt{D}}{2} - \frac{b - \sqrt{D}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} (\sqrt{D})^3 \\ &= \frac{1}{6} (\sqrt{4q})^3 \\ &= \frac{4}{3} q \sqrt{q} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



②

$$(1) \quad x+y+z=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x+2y+3z=5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、②—①から $y+2z=4$ なので、 $y=4-2z \quad \cdots \textcircled{3}$

これを①へ代入することで、

$$x+(4-2z)+z=1$$

よって $x=z-3 \quad \cdots \textcircled{4}$

さて、 $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ とすると、

$$P=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

であり、①、③、④により P から x, y を消去すると、

$$\begin{aligned} P &= 1 \cdot \{(z-3)^2 + (4-2z)^2 + z^2 - (z-3)(4-2z) - (4-2z)z - z(z-3)\} \\ &= 9z^2 - 33z + 37 \\ &= 9\left(z - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

よって P は $z = \frac{11}{6}$ のとき最小となる。

これは $x = -\frac{7}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{11}{6}$ のときであり、 P の最小値は $\frac{27}{4}$ …答

(2) $Q = xyz$ とする。このとき、③、④により x, y を消去すると、

$$Q = (z-3)(4-2z)z$$

$$= -2z^3 + 10z^2 - 12z$$

である。これを $f(z)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(z) &= -6z^2 + 20z - 12 \\ &= -6\left(z - \frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)\left(z - \frac{5+\sqrt{7}}{3}\right) \end{aligned}$$

$z \geq 0$ で、 z の関数 $f(z)$ の増減は右のようになる。

$$f(0)=0$$

$$2 < \frac{5+\sqrt{7}}{3} < 3 \text{ であり、 } f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right) > f(2)=f(3)=0$$

だから、 Q は $z = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$ で極大かつ最大となる。 …答

z	0	...	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	...
$f'(z)$		—	0	+	0	—
$f(z)$		↘		↗		↘

3

(1) $a_{n+1} = 8a_n^2$ について、 $a_1 = 2 > 0$ だから帰納的に $a_n > 0 (n \geq 1)$ であることが示せる。
よって、

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1} &= \log_2 8a_n^2 \\ &= \log_2 8 + \log_2 a_n^2 \\ &= 3 + 2\log_2 a_n\end{aligned}$$

となるから、 $\log_2 a_n = b_n$ のとき、

$$b_{n+1} = 2b_n + 3 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

である。よって数列 $\{b_n + 3\}$ は公比 2 の等比数列だから、

$$b_n + 3 = (b_1 + 3) \cdot 2^{n-1}$$

さて、 $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$ なので、

$$b_n + 3 = (1 + 3) \cdot 2^{n-1}$$

よって、

$$\begin{aligned}b_n &= 4 \cdot 2^{n-1} - 3 \\ &= 2^{n+1} - 3 \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$

(3) $\log_2 a_n = b_n$ から $a_n = 2^{b_n}$ である。よって、

$$\begin{aligned}P_n &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\ &= 2^{b_1} 2^{b_2} 2^{b_3} \cdots 2^{b_n} \\ &= 2^{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &= \sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 3) \\ &= \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n \\ &= 2^{n+2} - 3n - 4\end{aligned}$$

従って、

$$P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4} \quad \cdots \text{答}$$

(4) $P_n > 10^{100}$

について、

$$2^{2^{n+2} - 3n - 4} > 10^{100}$$

$$\log_2 2^{2^{n+2} - 3n - 4} > \log_2 10^{100}$$

$$2^{n+2} - 3n - 4 > 100 \log_2 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで $c_n = 2^{n+2} - 3n - 4$ とすると、

$$\begin{aligned}c_{n+1} - c_n &= 2^{n+3} - 3(n+1) - 4 - (2^{n+2} - 3n - 4) \\ &= 2^{n+2} - 3 > 0 \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

であるから数列 $\{c_n\}$ は n の増加数列である。

さて、 $3 = \log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 = 4$ だから $300 < 100 \log_2 10 < 400$ であり、

$$c_6 = 2^8 - 3 \cdot 6 - 4 = 234$$

$$c_7 = 2^9 - 3 \cdot 7 - 4 = 512 - 21 - 4 = 487$$

なので、 $\textcircled{1}$ をみたす n は $n \geq 7$ である。

従って $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n は、 $n = 7$ $\cdots$ 答