

①

$$(1) \quad H: x^2 - y^2 = 1$$

について、 $C(s, t)$ は双曲線 H 上の点であり、 $t \neq 0$ だから、

$$s < -1, 1 < s$$

をみたす。さて、点 $A(-1, 0)$ における H の接線の方程式は、

$$(-1)x - 0 \cdot y = 1$$

より、

$$x = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで、直線 BC の方程式は、

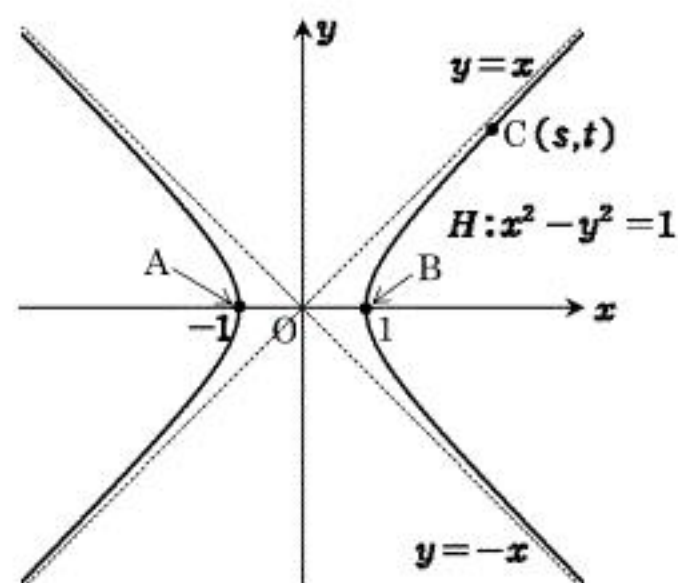
$$y = \frac{t-0}{s-1}(x-1)$$

$$= \frac{t}{s-1}(x-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

だから、①、②を連立させて、

$$x = -1, \quad y = -\frac{2t}{s-1}$$

従って、 $P\left(-1, -\frac{2t}{s-1}\right)$ …答



(2) 点 $C(s, t)$ における H の接線の方程式は、

$$sx - ty = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

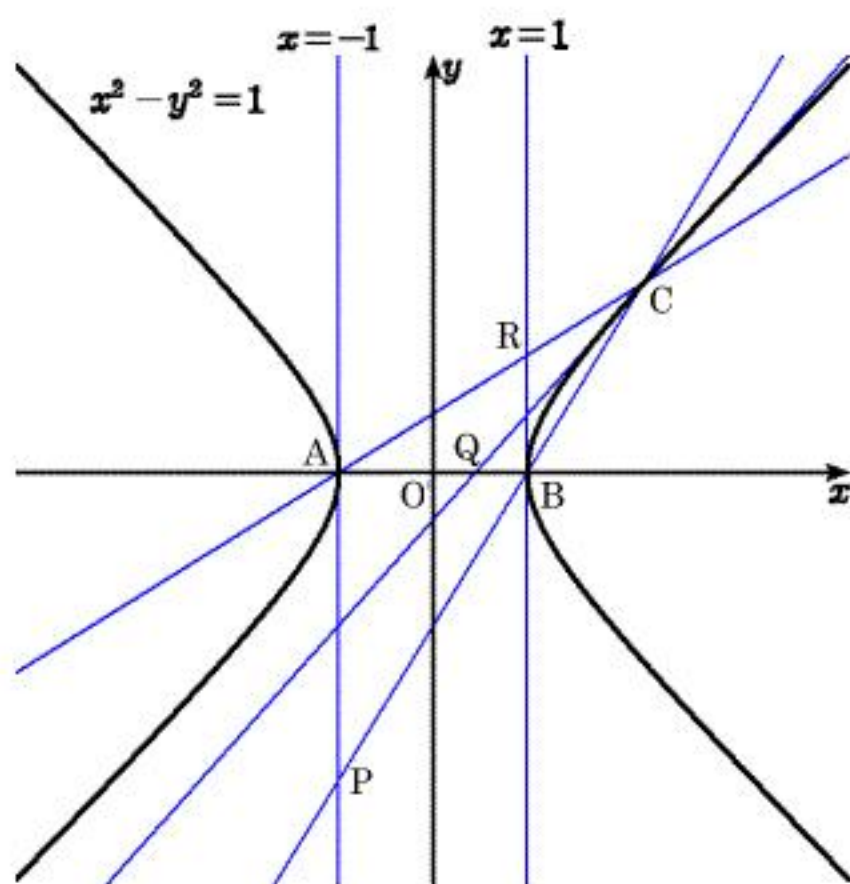
ここで、直線 AB の方程式は、

$$y = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

だから、③、④を連立させることで、

$$x = \frac{1}{s}, \quad y = 0$$

従って、 $Q\left(\frac{1}{s}, 0\right)$ …答



(3) 点 $B(1, 0)$ における H の接線の方程式は、

$$1 \cdot x - 0 \cdot y = 1$$

より、

$$x = 1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

ここで、直線 AC の方程式は、

$$y = \frac{t-0}{s-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$= \frac{t}{s+1}(x+1) \quad \cdots \textcircled{6}$$

だから、⑤、⑥を連立させることで、

$$x = 1, \quad y = \frac{2t}{s+1}$$

従って、 $R\left(1, \frac{2t}{s+1}\right)$

さて、

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{s} - (-1), 0 - \frac{-2t}{s-1} \right)$$

$$= \left(\frac{1+s}{s}, \frac{2t}{s-1} \right)$$

$$\overrightarrow{PR} = \left(1 - (-1), \frac{2t}{s+1} - \frac{-2t}{s-1} \right)$$

$$= \left(2, \frac{4st}{s^2-1} \right)$$

なので、

$$\overrightarrow{PR} = \frac{2s}{s+1} \overrightarrow{PQ}$$

が成立するので、3点 P, Q, R は同一直線上にある。 …証明終わり

[2]

(1) 5回とも表が出たとき、

$$w=1+z+z^2+z^3+z^4$$

であり、 $z \neq 1$ だから、

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-z^5}{1-z} \\ &= 0 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) まずは $z^5=1$ を解く。 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r>0$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とすると、

$$z^5=r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1$$

から、

$$r^5 \cos 5\theta = 1 \quad \cdots \text{①}$$

$$r^5 \sin 5\theta = 0 \quad \cdots \text{②}$$

をみたす。①, ②の両辺を2乗し、辺々加えると、

$$r^{10} \cos^2 5\theta + r^{10} \sin^2 5\theta = 1$$

$$r^{10} = 1$$

r は実数だから、 $r=1$ であり、このとき①, ②より、

$$\cos 5\theta = 1, \quad \sin 5\theta = 0$$

なので $5\theta=2n\pi$ (n は整数)である。 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ だから、

$$\theta = \frac{2}{5}\pi$$

従って、 $z = \cos \frac{2}{5}\pi + i\sin \frac{2}{5}\pi$ である。

さて、 $w=z+z^4$ について、 $z^5=1$ より $z^4=\frac{1}{z}$ であり、

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{1}{z} \\ &= z + z^{-1} \\ &= \cos \frac{2}{5}\pi + i\sin \frac{2}{5}\pi + \cos \left(-\frac{2}{5}\pi \right) + i\sin \left(-\frac{2}{5}\pi \right) \\ &= 2\cos \frac{2}{5}\pi \end{aligned}$$

だから、 $|w|=2\cos \frac{2}{5}\pi$ であり、 $\pi > \frac{2}{5}\pi > \frac{1}{3}\pi > 0$ だから

$$\cos \frac{2}{5}\pi < \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

従って、 $2\cos \frac{2}{5}\pi < 1$ である。

以上より、 $|w|<1$...証明終わり

(3) 硬貨を5回投げで出た表の回数で場合分けして考える。

(i) 表が0回(裏が5回)のとき、

$$w=0 \text{ だから } |w|=0<1$$

をみたす。

(ii) 表が1回(裏が4回)のとき、

$$w=z^i \quad (i=0,1,2,3,4)$$

について、

$$|w|=|z|^i=1$$

だから $|w|<1$ をみたさない。

(iii) 表が2回(裏が3回)のとき、

$$w=z^i+z^j \quad (0 \leq i < j \leq 4)$$

について、

$$\begin{aligned} |w| &= |z^i+z^j| \\ &= |z^i(z^{j-i}+1)| \\ &= |z|^i |z^{j-i}+1| \\ &= |z^{j-i}+1| \end{aligned}$$

$1 \leq j-i \leq 4$ である。すると、

$$\begin{aligned} |z+1| &= \left| \cos \frac{2}{5}\pi + 1 + i\sin \frac{2}{5}\pi \right| = \sqrt{\left(\cos \frac{2}{5}\pi + 1 \right)^2 + \left(\sin \frac{2}{5}\pi \right)^2} \\ &= \sqrt{2+2\cos \frac{2}{5}\pi} > 1 \end{aligned}$$

$$|z^2+1| = \left| \frac{1}{z^3} + 1 \right| = \frac{|1+z^3|}{|z|^3} = |z^3+1| \text{ であり、}$$

$$|z^2+1| = \frac{|z^2+1|}{|z|} = \left| z + \frac{1}{z} \right| < 1 \quad ((2) \text{より})$$

$$|z^4+1| = \left| \frac{1}{z} + 1 \right| = \frac{|1+z|}{|z|} = |z+1| > 1$$

よって、 $|w|<1$ となるのは、 $j-i=2,3$ の場合である。

そのような (i,j) の組は、

$$(i,j)=(0,2),(1,3),(2,4),(0,3),(1,4) \text{ の } 5 \text{ 組ある。}$$

(iii) 表が3回(裏が2回)のとき、

$$v=z^i+z^j \quad (0 \leq i < j \leq 4)$$

について、

$$w=z^4+z^3+z^2+z+1-v$$

と表せる。 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ だから、 $w=-v$ であり、

$$|w|=|-v|$$

$$= |-z^i-z^j|$$

$$= |z^i+z^j|$$

なので、(ii)と同様である。

(iv) 表が4回(裏が1回)のとき、

$$v=z^i \quad (i=0,1,2,3,4)$$

について、

$$w=z^4+z^3+z^2+z+1-v$$

と表せる。 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ だから、 $w=-v$ であり、

$$|w|=|-v|=|z|^i=1$$

だから $|w|<1$ をみたさない。

(v) 表が5回(裏が0回)のとき、

$$w=1+z+z^2+z^3+z^4$$

$$= 0$$

だから $|w|<1$ をみたす。

以上(i)~(v)より、求める確率は、

$$\frac{{}_5C_0+0+5+5+0+{}_5C_5}{2^5} = \frac{3}{8} \quad \cdots \text{答}$$

[3]

(1) $b \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| \\ &= \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} + 2\sqrt{7} \right| \\ &\leq \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| + |2\sqrt{7}| \\ &= \left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| + 2\sqrt{7} \\ &< \frac{2}{b^4} + 2\sqrt{7} \\ &\leq \frac{2}{2^4} + 2\sqrt{7} \\ &< 0.125 + 2 \cdot 2.646 \\ &= 5.417 < 6 \quad \cdots \text{証明終わり} \end{aligned}$$

(2) $\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4}$, $\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6 (b \geq 2)$ より、

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| \left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \cdot 6$$

が成立。よって、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a^2}{b^2} - 7 \right| < \frac{12}{b^4} \\ & |a^2 - 7b^2| < \frac{12}{b^2} \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

ここで $b \geq 4$ とすると $\frac{12}{b^2} \leq \frac{12}{4^2} = \frac{12}{16} < 1$ であり、 $a^2 - 7b^2$ は整数であるから、

$$a^2 - 7b^2 = 0$$

となるしかない。しかし、このとき $\frac{a}{b} = \sqrt{7}$ となり、左辺は有理数、右辺は無理数だから矛盾。

よって $b = 2, 3$ のみ考えられる。

(i) $b = 2$ のとき、①は、

$$\begin{aligned} & |a^2 - 7 \cdot 2^2| < \frac{12}{2^2} \\ & |a^2 - 28| < 3 \\ & -3 < a^2 - 28 < 3 \\ & 25 < a^2 < 31 \end{aligned}$$

これをみたす自然数 a は存在しない。

(ii) $b = 3$ のとき、①は、

$$\begin{aligned} & |a^2 - 7 \cdot 3^2| < \frac{12}{3^2} \\ & |a^2 - 63| < \frac{4}{3} \\ & -\frac{4}{3} < a^2 - 63 < \frac{4}{3} \\ & 61 + \frac{2}{3} < a^2 < 64 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

これをみたす自然数は $a = 8$ のみ。

次に、

$$\left| \frac{8}{3} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{3^4} \quad \cdots \text{②}$$

が成立することを確認する。 $\frac{8}{3} - \sqrt{7} = \frac{\sqrt{64} - \sqrt{63}}{3} > 0$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3^4} - \left(\frac{8}{3} - \sqrt{7} \right) &= \sqrt{7} - \frac{642}{243} \\ &> 2.645 - \frac{642.006}{243} \\ &= 2.645 - 2.642 \\ &> 0 \end{aligned}$$

だから②は成立する。

以上(i)(ii)より、

$$a = 8, \quad b = 3 \quad \cdots \text{答}$$

④

(1) $f(x)=-x^2+bx+c$ について、

$$0\leq f(1)\leq 2, \quad 5\leq f(3)\leq 6$$

$$\Leftrightarrow 1\leq b+c\leq 3, \quad 14\leq 3b+c\leq 15 \quad \cdots \textcircled{1}$$

をみたす。さて、

$$f(4)=k$$

とおくと、これは、

$$c=-4b+k+16 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と同値である。よって、 $f(4)$ のとりうる

値の範囲は、 bc 平面で①をみたす点 (b,c) の存在領域

(右図の斜線部分、境界を含む。領域 D とする)と、

直線②が共有点をもつような k の範囲である。

$$A\left(\frac{11}{2},-\frac{5}{2}\right), \quad B\left(\frac{13}{2},-\frac{11}{2}\right), \quad C(7,-6), \quad D(6,-3)$$

とする。

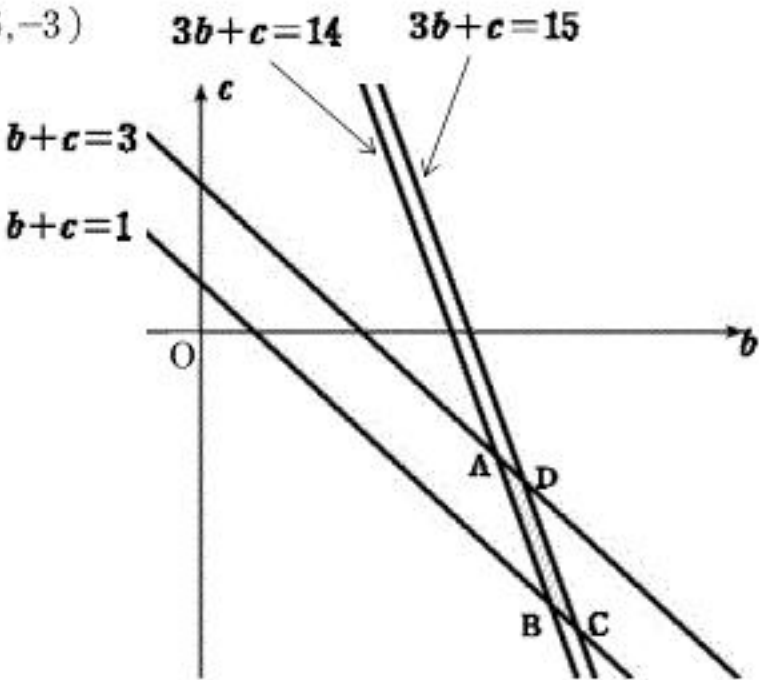
②が点 A を通るとき、

$$k=4\cdot\frac{11}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)-16=\frac{7}{2}$$

②が点 C を通るとき、

$$k=4\cdot 7+(-6)-16=6$$

$$\text{よって、}\frac{7}{2}\leq f(4)\leq 6 \quad \cdots \text{答}$$



$$(2) \quad f(x)=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+c+\frac{b^2}{4}$$

より $q=c+\frac{b^2}{4}$ である。よって、

$$c=-\frac{b^2}{4}+q \quad \cdots \textcircled{3}$$

であり、領域 D と放物線③が共有点をもつ範囲を考えればよい。

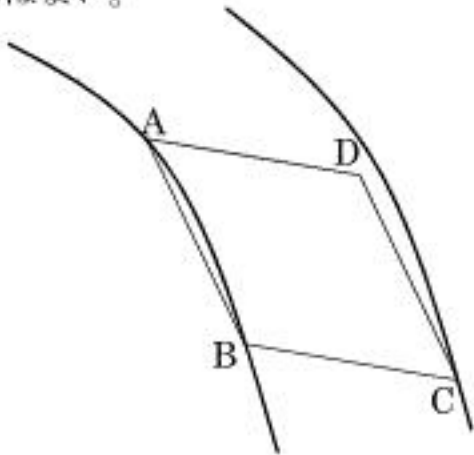
③が4点 A, B, C, D を通るとき、それぞれ、

$$q=-\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{81}{16}$$

$$q=-\frac{11}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{13}{2}\right)^2=\frac{81}{16}$$

$$q=-6+\frac{7^2}{4}=\frac{25}{4}$$

$$q=-3+\frac{6^2}{4}=6$$



また、放物線③が直線 AB と接するための条件を考える。

$$3b+c=14, \quad c=-\frac{b^2}{4}+q$$

より c を消去して、

$$b^2-12b+56-4q=0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$(b-6)^2=4q-20$$

これが重解を持つ条件から、

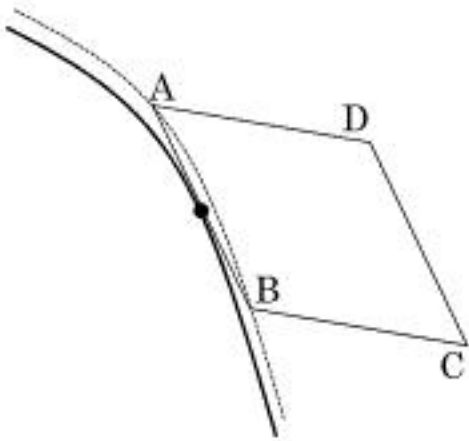
$$4q-20=0$$

$$q=5$$

このとき④の重解は $b=6$ だから、

(点 A の x 座標) $<6<$ (点 B の x 座標)

をみたす。従って、 $q=5$ のとき放物線③は線分 AB と接する。



以上から、

$$5\leq q\leq \frac{25}{4} \quad \cdots \text{答}$$

$$(3) \quad f(x)=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+6$$

について、 $f(x)=0$ から $x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{6}$

よって $\alpha=\frac{b}{2}-\sqrt{6}$, $\beta=\frac{b}{2}+\sqrt{6}$ とすると、

求める面積 S は、

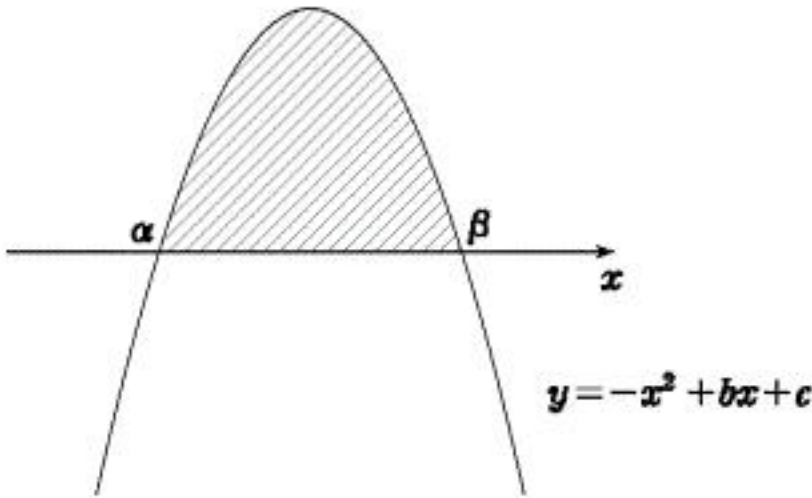
$$S=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{b}{2}+\sqrt{6}-\left(\frac{b}{2}-\sqrt{6}\right)\right\}^3$$

$$=8\sqrt{6} \quad \cdots \text{答}$$



⑤

(1) xyz 空間で考える。 xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を N とする。このとき、

平面 $y=t$ による L , N の切り口を xz 平面へ正射影したものは、それぞれ

$$x^2 + z^2 \leq t \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(x-1)^2 + z^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

で与えられる。よって、平面 $y=t$ による M の切り口を xz 平面へ正射影したものは、右図の斜線部分となる。この面積が $S(t)$ である。

$$\begin{aligned} \cos \angle POH &= \frac{OH}{OP} \\ &= \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{\sqrt{t}}{2} \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

だから $\angle POH = \theta$ である。

また、 $AO = AP$ なので $\angle OPA = \theta$

ゆえに、 $\angle PAO = \pi - 2\theta$ である。

以上から、

$$\begin{aligned} S(t) &= \text{扇形 OPQ} - \text{三角形 OPQ} \\ &\quad + \text{扇形 APQ} - \text{三角形 APQ} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{t})^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2}(\sqrt{t})^2 \sin 2\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (2\pi - 4\theta) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(2\pi - 4\theta) \\ &= t\theta - \frac{1}{2}t \sin 2\theta \\ &\quad + \pi - 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta \end{aligned}$$

ここで $t = 4 \cos^2 \theta = 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = 2(1 + \cos 2\theta)$ だから、

$$\begin{aligned} S(t) &= 2(1 + \cos 2\theta)\theta - \frac{1}{2} \cdot 2(1 + \cos 2\theta) \sin 2\theta \\ &\quad + \pi - 2\theta + \sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \quad V = \int_0^2 S(t) dt$$

$$= \int_0^2 (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi) dt$$

であり、 $t = 2 + 2 \cos 2\theta$ について、

$$\frac{dt}{d\theta} = -4 \sin 2\theta$$

だから、

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)(-4 \sin 2\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-8\theta \sin 2\theta \cos 2\theta + 4 \sin^2 2\theta - 4\pi \sin 2\theta) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-4\theta \sin 4\theta + 4 \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{2} - 4\pi \sin 2\theta \right) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (-4\theta \sin 4\theta + 2 - 2 \cos 4\theta - 4\pi \sin 2\theta) d\theta \end{aligned}$$

さて、

$$\begin{aligned} \int \theta \sin 4\theta d\theta &= \theta \left(-\frac{1}{4} \cos 4\theta \right) - \int \left(-\frac{1}{4} \cos 4\theta \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \theta \cos 4\theta + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\theta + C \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} V &= \left[\theta \cos 4\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta + 2\pi \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \cos \pi - \frac{1}{4} \sin \pi + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \pi + 2\pi \cos \frac{\pi}{2} \\ &\quad - \left(\frac{\pi}{2} \cos 2\pi - \frac{1}{4} \sin 2\pi + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\pi + 2\pi \cos \pi \right) \\ &= \frac{3}{4} \pi \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

