

①

$$f(t) = (\sin t - \cos t) \sin 2t$$

について

(1) $x = \sin t - \cos t$ のとき、

$$\begin{aligned} x^2 &= \sin^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t \\ &= 1 - \sin 2t \end{aligned}$$

より $\sin 2t = 1 - x^2$ である。よって、

$$f(t) = x(1 - x^2) = -x^3 + x \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad x = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad -\frac{\pi}{4} \leq t - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$$

から $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ なので、

$$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

ここで $g(x) = -x^3 + x$ とおくと、

$$g'(x) = -3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

より $g(x)$ の増減は次のようになる。

x	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$

$$-\sqrt{2} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{162}}{9} < 0$$

なので、

$$\text{最大値は } \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{ 最小値は } -\sqrt{2} \quad \cdots \text{答}$$

[2]

(a, b, c) の組は全部で 6^3 (通り) あり、全て同様に確からしい。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 &= \int_a^c (x-a)(x-b)dx \\
 &= \int_a^c (x-a)(x-a+a-b)dx \\
 &= \int_a^c \{(x-a)^2 + (a-b)(x-a)\}dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 + \frac{a-b}{2}(x-a)^2 \right]_a^c \\
 &= \frac{1}{3}(c-a)^3 + \frac{a-b}{2}(c-a)^2 \\
 &= \frac{(c-a)^2}{6} \{2(c-a) + 3(a-b)\} \\
 &= \frac{1}{6}(c-a)^2(2c+a-3b)
 \end{aligned}$$

よって、

$$a=c \text{ または } a+2c=3b \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 $1 \leq a \leq 6$, $1 \leq b \leq 6$, $1 \leq c \leq 6$ であることに注意する。

(i) $a=c$ となるような (a, b, c) の組は、 $6 \cdot 6 = 36$ (通り)

(ii) $a+2c=3b$ となるのは、

$$b=1 \text{ のとき、 } a+2c=3 \text{ より } (a, c)=(1, 1)$$

$$b=2 \text{ のとき、 } a+2c=6 \text{ より } (a, c)=(2, 2), (4, 1)$$

$$b=3 \text{ のとき、 } a+2c=9 \text{ より } (a, c)=(1, 4), (3, 3), (5, 2)$$

$$b=4 \text{ のとき、 } a+2c=12 \text{ より } (a, c)=(2, 5), (4, 4), (6, 3)$$

$$b=5 \text{ のとき、 } a+2c=15 \text{ より } (a, c)=(3, 6), (5, 5)$$

$$b=6 \text{ のとき、 } a+2c=18 \text{ より } (a, c)=(6, 6)$$

以上、12 通り。

(i), (ii) には $(a, b, c) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)$ の 6 通りが共通して含まれるから、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, b, c) の組は、

$$36 + 12 - 6 = 42 \text{ (通り)}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{42}{6^3} = \frac{7}{36} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $a \geq 2$, $b \geq 2$ であり、

$$2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$$

$$2(\log_a b - \log_a c) + \frac{\log_a c}{\log_a b} - 1 = 0$$

$$2(\log_a b - \log_a c) + \frac{\log_a c - \log_a b}{\log_a b} = 0$$

$$(\log_a b - \log_a c) \left(2 - \frac{1}{\log_a b} \right) = 0$$

よって、

$$\log_a b - \log_a c = 0 \quad \text{または} \quad 2 - \frac{1}{\log_a b} = 0$$

から、

$$b=c \quad \cdots \textcircled{2}$$

または、

$$a=b^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。 $2 \leq a \leq 6$, $2 \leq b \leq 6$, $1 \leq c \leq 6$ であるから、

(ア) $\textcircled{2}$ を満たすような (a, b, c) の組は、 $5^2 = 25$ (通り)

(イ) $\textcircled{3}$ を満たすような (a, b, c) の組は、 $(a, b, c) = (4, 2, k) (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ の 6 通り。

(ア), (イ) は $(a, b, c) = (4, 2, 2)$ を共通に含む。

以上より求める確率は、

$$\frac{25+6-1}{6^3} = \frac{5}{36} \quad \cdots \text{答}$$

③

(1) 条件より、

$$\overrightarrow{AP} = (1-s)\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = (1-s)\overrightarrow{AC}$$

だから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{AB} = (1-s, 0, s)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{AC} = (0, 1-s, s)$$

また、

$$\overrightarrow{FR} = (1-t)\overrightarrow{FD}, \quad \overrightarrow{FS} = (1-t)\overrightarrow{FE}$$

だから、

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OF} + (1-t)\overrightarrow{FD} = (t-1, 0, -t)$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OF} + (1-t)\overrightarrow{FE} = (0, t-1, -t)$$

すると、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (s-1, 1-s, 0) = (s-1)(1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = (t-1, 1-t, 0) = (t-1)(1, -1, 0)$$

だから $PQ \parallel SR$ なので、4点 P, Q, R, S は同一平面上にある。 …証明終わり

(2) 条件から、

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{1}{2}(1-s, 1-s, 2s) \quad \cdots \ast$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}}{2} = \frac{1}{2}(t-1, t-1, -2t) \quad \cdots \ast$$

なので、

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(s+t-2, s+t-2, -2s-2t)$$

$$= \frac{1}{2}(u-2, u-2, -2u) \quad (s+t=u \text{ とおいた。 } 0 < s < 1, 0 < t < 1 \text{ から } 0 < u < 2)$$

すると、

$$|\overrightarrow{LM}|^2 = \frac{1}{4}\{(u-2)^2 + (u-2)^2 + (-2u)^2\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{6\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}\right\}$$

となり、これは $u = \frac{2}{3}$ のとき最小となる。

求める最小値 m は、

$$m = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (2)で $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき、 $s+t = \frac{2}{3}$ である。よって、

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(1, 1, 1)$$

だから、 $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ なので $LM \perp PQ$, $LM \perp SR$ である。

ここで、平面 PQRS と辺 BE, 辺 CD の交点をそれぞれ T, U とすると、正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口は六角形 PQRSTU であり、

$$PQ \parallel BC, \quad SR \parallel BC$$

であるから、 $TU \parallel BC$ なので、

$$TU = BC = \sqrt{2}$$

である。

さて、六角形 PQRSTU について、線分 LM と線分 TU の交点を H とすると、

$$LH : HM = 2s : |-2t| = s : t \quad ((2) \text{ の } \ast \text{ より})$$

なので、

$$LH = \frac{s}{s+t} LM = \frac{s}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}s$$

$$HM = \frac{t}{s+t} LM = \frac{t}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}t$$

また、

$$PQ = \sqrt{2}(1-s), \quad SR = \sqrt{2}(1-t)$$

なので、

$$X = (\text{台形 PQUT の面積}) + (\text{台形 RSTU の面積})$$

$$= \frac{1}{2}(PQ + TU) \cdot LH + \frac{1}{2}(SR + TU) \cdot MH$$

$$= \frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-s) + \sqrt{2}\} \cdot \sqrt{3}s + \frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-t) + \sqrt{2}\} \cdot \sqrt{3}t$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\{(2-s)s + (2-t)t\}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s+t)^2 + 2st\}$$

$$= \sqrt{6}st + \frac{4\sqrt{6}}{9} \quad \left(s+t = \frac{2}{3}\right)$$

$$\leq \sqrt{6}\left(\frac{s+t}{2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{6}}{9} \quad (\text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の大小関係。等号は } s=t=\frac{1}{3} \text{ のときのみ成立する})$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

以上より、

$$X \text{ の最大値は } \frac{5\sqrt{6}}{9}, \quad s=t=\frac{1}{3} \quad \cdots \text{答}$$

