

①

$$(1) \quad f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$$

について、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示す。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - (1-x) \\ &= \frac{x^2}{1+x} > 0 \end{aligned}$$

よって関数 $f(x)$ は $x > 0$ で増加する。また $f(0) = 0$ だから、 $x > 0$ で $f(x) > 0$ である。

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x) = x(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \log(1+x)$$

について、 $x > 0$ のとき $g(x) > 0$ であることを示す。

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (1+x)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{x+2-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{(x+2-2\sqrt{1+x})(x+2+2\sqrt{1+x})}{2(1+x)\sqrt{1+x}(x+2+2\sqrt{1+x})} \\ &= \frac{(x+2)^2 - 4(1+x)}{2(1+x)\sqrt{1+x}(x+2+2\sqrt{1+x})} \\ &= \frac{x^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}(x+2+2\sqrt{1+x})} > 0 \end{aligned}$$

よって関数 $g(x)$ は $x > 0$ で増加する。また $g(0) = 0$ だから、 $x > 0$ で $g(x) > 0$ である。

以上から、 $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

が成り立つ。 …証明終わり

$$(2) \quad h(x) = \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$$

について、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\frac{1}{1+x}}{\{\log(1+x)\}^2} - \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{(1+x)\{\log(1+x)\}^2 - x^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2} \\ &= \frac{1}{x^2\{\log(1+x)\}^2} \left[\log(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1+x}} \right] \left[\log(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}} \right] < 0 \quad ((1)より) \end{aligned}$$

よって $h(x)$ は $x > 0$ で減少する。すると、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0 \quad (\text{正の値をとりながら } 0 \text{ に収束})$$

また $\lim_{x \rightarrow +0} h(x)$ の計算について、(1)より、 $x - \frac{x^2}{2} > 0$ を解くと、 $0 < x < 2$ であるので、

$0 < x < 2$ において、

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} < \frac{1}{x - \frac{x^2}{2}}$$

が成立する。このとき、

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{1}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{x - \frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x}$$

が成立するから、整理すると、

$$\frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} < h(x) < \frac{1}{2-x}$$

ここで、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}$$

だからさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow +0} h(x) = \frac{1}{2}$$

以上から、

$$0 < h(x) < \frac{1}{2}$$

つまり、 $0 < y < \frac{1}{2}$ である。 …答

②

$$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

(1) $f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとき、 $f(c) = 0$ が成立し、

$$c^4 - ac^3 + bc^2 - ac + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。①から、

$$ac(c^2 + 1) = c^4 + bc^2 + 1$$

$$c = \frac{c^4 + bc^2 + 1}{a(c^2 + 1)} > 0$$

である。また、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{c}\right) &= \left(\frac{1}{c}\right)^4 - a\left(\frac{1}{c}\right)^3 + b\left(\frac{1}{c}\right)^2 - a\frac{1}{c} + 1 \\ &= \frac{1 - ac + bc^2 - ac^3 + c^4}{c^4} \\ &= 0 \quad (\textcircled{1} \text{より}) \end{aligned}$$

よって $f(x)$ は $x - \frac{1}{c}$ で割り切れる。

ここで、 $c \neq 1$ とすると $c \neq \frac{1}{c}$ だから、 $f(x)$ は $(x - c)\left(x - \frac{1}{c}\right)$ で割り切れる。

$c = 1$ とすると、①より $b = 2a - 2$ だから、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - ax^3 + 2(a - 1)x^2 - ax + 1 \\ &= (x - 1)^2 \{x^2 + (2 - a)x + 1\} \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ は $(x - 1)^2$ で割り切れる。

つまり $f(x)$ は $(x - c)\left(x - \frac{1}{c}\right)$ で割り切れる。

以上より題意は示せた。…証明終わり

$$(2) \quad f(x) = (x - s)(x - t)(x - u)(x - v)$$

のとき、 $f(x)$ は $x - s$ で割り切れるので、(1)の結果より $s > 0$ であり、

$$f(x) = (x - s)\left(x - \frac{1}{s}\right)(x - t)(x - u)$$

と表せる。また $f(x)$ は $x - t$ で割り切れるので、(1)の結果より $t > 0$ であり、展開式において

定数項は $(-s)\left(-\frac{1}{s}\right)(-t)(-u) = tu$ だから、 $tu = 1$ より $u = \frac{1}{t}$ である。従って、

$$f(x) = (x - s)\left(x - \frac{1}{s}\right)(x - t)\left(x - \frac{1}{t}\right)$$

と表せる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{x^2 - \left(s + \frac{1}{s}\right)x + 1\right\} \left\{x^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right)x + 1\right\} \\ &= x^4 - \left(s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}\right)x^3 + \left\{2 + \left(s + \frac{1}{s}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)\right\}x^2 - \left(s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}\right)x + 1 \end{aligned}$$

から、

$$a = s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t}, \quad b = 2 + \left(s + \frac{1}{s}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。従って、相加平均・相乗平均の関係から、

$$s + \frac{1}{s} + t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{s \cdot \frac{1}{s}} + 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 4 \quad (\text{等号は } s = t = 1 \text{ のときのみ成立})$$

よって、 $a \geq 4$ である。…証明終わり

$$(3) \quad s + \frac{1}{s} = p, \quad t + \frac{1}{t} = q \text{ とおくと}$$

$p \geq 2, q \geq 2$ であり、 $a = 5$ のとき②から、

$$5 = p + q, \quad b = 2 + pq$$

$q = 5 - p$ だから、

$$\begin{cases} 5 - p \geq 2 \\ b = 2 + p(5 - p) \end{cases}$$

よって、

$$2 \leq p \leq 3, \quad b = -\left(p - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

から右のグラフより、 b が自然数となるのは、

$p = 2, 3$ のときのみであり、 $b = 8$ となる。

逆に $b = 8$ のとき、

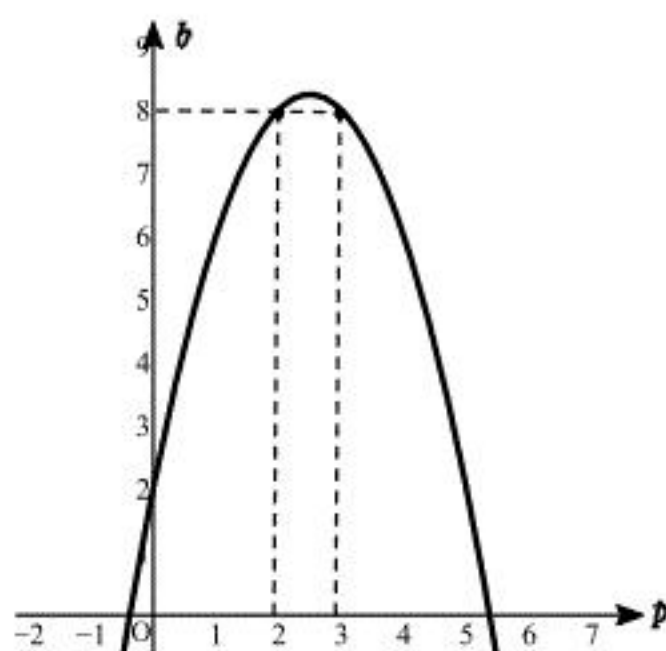
$$p + q = 5, \quad pq = 6$$

から $(p, q) = (2, 3), (3, 2)$ となり、

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 3x + 1) = (x - 1)^2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

だから問いの条件をみたす。以上から、

$$b = 8 \quad \cdots \text{答}$$



[3]

(1) $f(t) = 2\sin t + \cos 2t$ について、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\cos t - 2\sin 2t \\ &= 2\cos t(1 - 2\sin t) \end{aligned}$$

よって $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(t)$ の増減は右のようになり、

最大値は、

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \quad \dots \text{答}$$

次に $g(t) = 2\cos t + \sin 2t$ について、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2\sin t + 2\cos 2t \\ &= 2(\sin t + 1)(1 - 2\sin t) \end{aligned}$$

よって $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ における $g(t)$ の増減は右のようになり、

最大値は、

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{答}$$

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	0
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

(2) $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$, $f(t_1) = f(t_2)$ のとき、

$$\begin{aligned} 2\sin t_1 + \cos 2t_1 &= 2\sin t_2 + \cos 2t_2 \\ 2\sin t_1 + 1 - 2\sin^2 t_1 &= 2\sin t_2 + 1 - 2\sin^2 t_2 \\ 2(\sin^2 t_1 - \sin^2 t_2) - 2(\sin t_1 - \sin t_2) &= 0 \\ (\sin t_1 - \sin t_2)(\sin t_1 + \sin t_2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

よって、

$$\sin t_1 = \sin t_2 \quad \dots \text{①}$$

または

$$\sin t_1 + \sin t_2 = 1 \quad \dots \text{②}$$

ここで $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ だから①は成立しない。よって②であり、(1)により、

$0 \leq t_1 < \frac{\pi}{6} < t_2 \leq \frac{\pi}{2}$ をみたとす。 $\sin t_1 = p$, $\sin t_2 = q$ とおくと $p + q = 1$, $0 \leq p < \frac{1}{2} < q \leq 1$ であり、

$$\begin{aligned} g(t)^2 &= \{2\cos t(1 + \sin t)\}^2 = 4\cos^2 t(1 + \sin t)^2 \\ &= 4(1 - \sin^2 t)(1 + \sin t)^2 = 4(1 - \sin t)(1 + \sin t)^3 \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} g(t_1)^2 - g(t_2)^2 &= 4(1 - \sin t_1)(1 + \sin t_1)^3 - 4(1 - \sin t_2)(1 + \sin t_2)^3 \\ &= 4(1 - p)(1 + p)^3 - 4(1 - q)(1 + q)^3 \\ &= 4(1 - p)(1 + p)^3 - 4p(2 - p)^3 \quad (p + q = 1 \text{ より}) \\ &= 4(1 - p)(1 + 3p + 3p^2 + p^3) - 4p(8 - 12p + 6p^2 - p^3) \\ &= 4(-8p^3 + 12p^2 - 6p + 1) \\ &= 4(1 - 2p)^3 > 0 \quad (0 \leq p < \frac{1}{2} \text{ より}) \quad \dots \text{証明終わり} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果より、 $g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ だから、 $\{g(t_1) + g(t_2)\}\{g(t_1) - g(t_2)\} > 0$

(1)より $g(t_1) \geq 0$, $g(t_2) \geq 0$ なので、

$$g(t_1) > g(t_2)$$

である。よって、曲線 C に結節点(交差する点)は

存在しない。($t = \frac{\pi}{6}$ のときの点は尖点。)

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6} \text{ における } y \text{ を } y = g_1(t)$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ における } y \text{ を } y = g_2(t)$$

とすると、

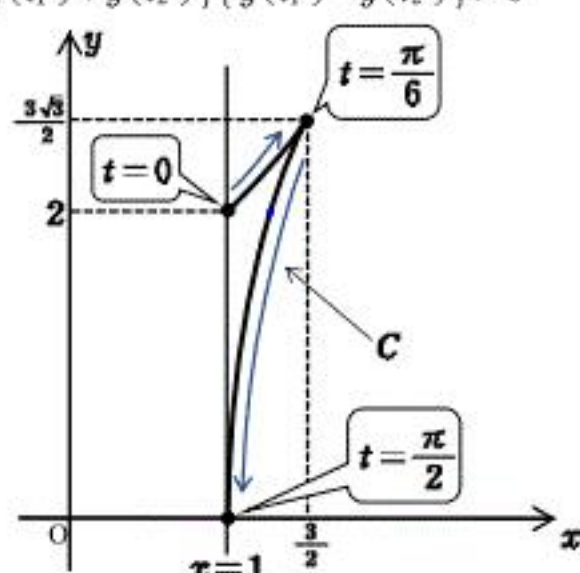
$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{3}{2}} g_1(t) dx - \int_1^{\frac{3}{2}} g_2(t) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) dt \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &(2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t) \\ &= 4\cos^2 t - 2\cos t \sin 2t - 2\sin^2 2t \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} - 4\cos^2 t \sin t - 2 \cdot \frac{1 - \cos 4t}{2} \\ &= 2\cos 2t - 4\cos^2 t \sin t + \cos 4t + 1 \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} S &= \left[\sin 2t + \frac{4}{3}\cos^3 t + \frac{1}{4}\sin 4t + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{3}(0^3 - 1^3) + \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$



④

(1) 条件より、

$$\overrightarrow{AP} = (1-s)\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = (1-s)\overrightarrow{AC}$$

だから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{AB} = (1-s, 0, s)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{AC} = (0, 1-s, s)$$

また、

$$\overrightarrow{FR} = (1-t)\overrightarrow{FD}, \quad \overrightarrow{FS} = (1-t)\overrightarrow{FE}$$

だから、

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OF} + (1-t)\overrightarrow{FD} = (t-1, 0, -t)$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OF} + (1-t)\overrightarrow{FE} = (0, t-1, -t)$$

すると、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (s-1, 1-s, 0) = (s-1)(1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = (t-1, 1-t, 0) = (t-1)(1, -1, 0)$$

だから $PQ \parallel SR$ なので、4点 P, Q, R, S は同一平面上にある。 …証明終わり

(2) 条件から、

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{1}{2}(1-s, 1-s, 2s) \quad \cdots \ast$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}}{2} = \frac{1}{2}(t-1, t-1, -2t) \quad \cdots \ast$$

なので、

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(s+t-2, s+t-2, -2s-2t)$$

$$= \frac{1}{2}(u-2, u-2, -2u) \quad (s+t=u \text{ とおいた。 } 0 < s < 1, 0 < t < 1 \text{ から } 0 < u < 2)$$

すると、

$$|\overrightarrow{LM}|^2 = \frac{1}{4}\{(u-2)^2 + (u-2)^2 + (-2u)^2\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{6\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}\right\}$$

となり、これは $u = \frac{2}{3}$ のとき最小となる。

求める最小値 m は、

$$m = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (2)で $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき、 $s+t = \frac{2}{3}$ である。よって、

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}(1, 1, 1)$$

だから、 $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ なので $LM \perp PQ$, $LM \perp SR$ である。

ここで、平面 PQRS と辺 BE, 辺 CD の交点をそれぞれ T, U とすると、正八面体 ABCDEF の 4点 P, Q, R, S を通る平面による切り口は六角形 PQRSTU であり、

$PQ \parallel BC$, $SR \parallel BC$

であるから、 $TU \parallel BC$ なので、

$$TU = BC = \sqrt{2}$$

である。

さて、六角形 PQRSTU について、線分 LM と線分 TU の交点を H とすると、

$$LH : HM = 2s : |-2t| = s : t \quad ((2) \text{ の } \ast \text{ より})$$

なので、

$$LH = \frac{s}{s+t} LM = \frac{s}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}s$$

$$HM = \frac{t}{s+t} LM = \frac{t}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}t$$

また、

$$PQ = \sqrt{2}(1-s), \quad SR = \sqrt{2}(1-t)$$

なので、

$$X = (\text{台形 PQUT の面積}) + (\text{台形 RSTU の面積})$$

$$= \frac{1}{2}(PQ + TU) \cdot LH + \frac{1}{2}(SR + TU) \cdot MH$$

$$= \frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-s) + \sqrt{2}\} \cdot \sqrt{3}s + \frac{1}{2}\{\sqrt{2}(1-t) + \sqrt{2}\} \cdot \sqrt{3}t$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\{(2-s)s + (2-t)t\}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\{2(s+t) - (s+t)^2 + 2st\}$$

$$= \sqrt{6}st + \frac{4\sqrt{6}}{9} \quad \left(s+t = \frac{2}{3}\right)$$

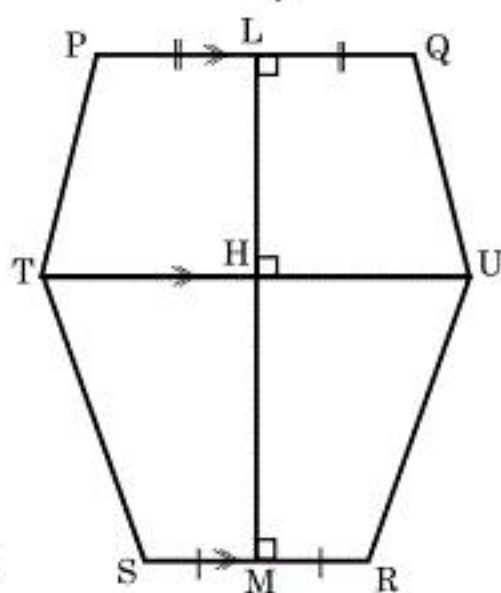
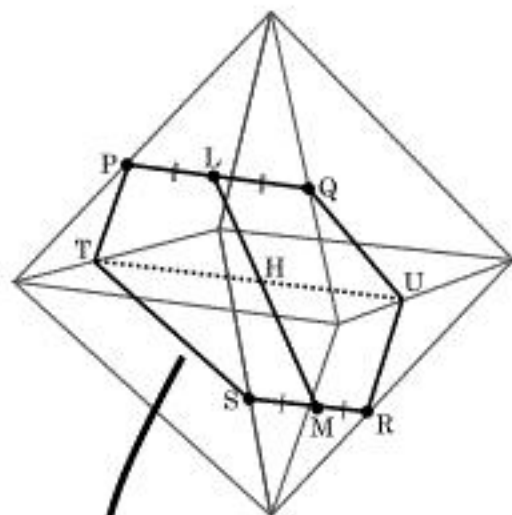
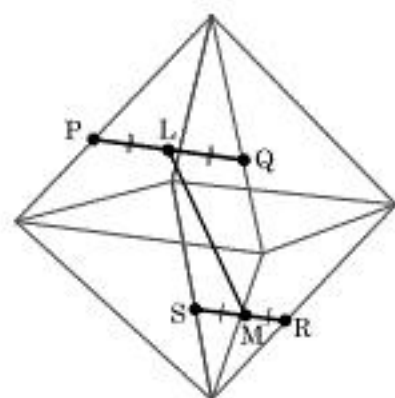
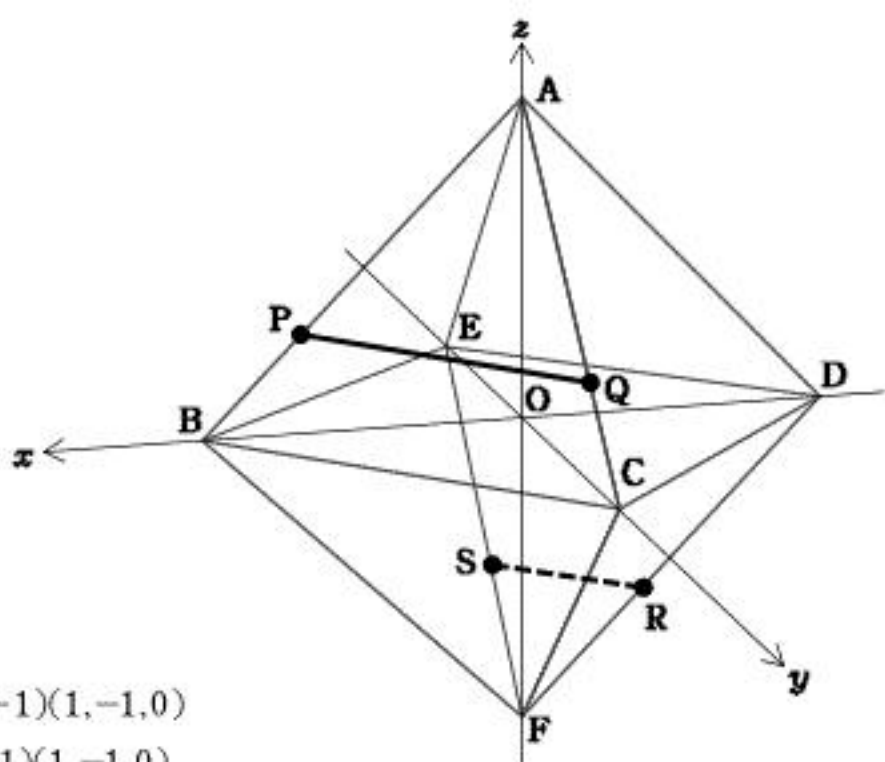
$$\leq \sqrt{6}\left(\frac{s+t}{2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{6}}{9} \quad (\text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の大小関係。等号は } s=t=\frac{1}{3} \text{ のときのみ成立する})$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{9}$$

以上より、

$$X \text{ の最大値は } \frac{5\sqrt{6}}{9}, \quad s=t=\frac{1}{3} \quad \cdots \text{答}$$



⑤

(1) 条件より、試合を行うことで、下のような確率で勝つチームの変化(変化無しも含む)が起こる。従って、

$n+1$ 試合目に A が勝つ確率 a_{n+1} を、
 n 試合目に A が勝つ場合(確率 a_n)と、
 n 試合目に B が勝つ場合(確率 $(1-a_n)$)

を使って表すことで、

$$a_{n+1} = a_n \cdot p + (1-a_n) \cdot q \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。①より、

$$a_{n+1} = (p-q)a_n + q$$

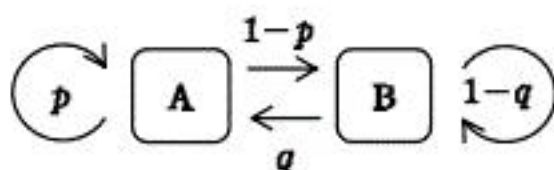
$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p+q} = (p-q) \left(a_n - \frac{q}{1-p+q} \right)$$

よって数列 $\left\{ a_n - \frac{q}{1-p+q} \right\}$ は公比 $p-q$ の等比数列だから、

$$a_n - \frac{q}{1-p+q} = \left(a_1 - \frac{q}{1-p+q} \right) (p-q)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{q}{1-p+q} + \left(p - \frac{q}{1-p+q} \right) (p-q)^{n-1} \quad (a_1 = p \text{ より})$$

$$= \frac{q + (1-p)(p-q)^n}{1-p+q} \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成立する}) \quad \cdots \text{答}$$



(2) 勝ったチーム名を並べていくことで、A と B の順列ができ、1 対 1 対応する。
 n 回の試合で A が $n-2$ 回、B が 2 回勝つ場合で、B が連勝しないものを考える。

すると、次の排反な 4 つのパターンに分けられる。

(i) 1 回目に A が勝ち、 n 回目に A が勝つもの

(ii) 1 回目に A が勝ち、 n 回目に B が勝つもの

(iii) 1 回目に B が勝ち、 n 回目に A が勝つもの

(iv) 1 回目に B が勝ち、 n 回目に B が勝つもの

$n=3$ のとき、(iv)のタイプのみであり、BAB の順に勝つ場合だけなので、

$$\text{その確率は } (1-p)q(1-p) = (1-p)^2 q$$

$n=4$ のとき、(i)のタイプは無く、

(ii)のタイプが ABAB の順に勝つ場合だけで、その確率は $p(1-p)q(1-p) = p(1-p)^2 q$

(iii)のタイプが BABA の順に勝つ場合だけで、その確率は $(1-p)q(1-p)q = (1-p)^2 q^2$

(iv)のタイプが BAAB の順に勝つ場合だけで、その確率は $(1-p)qp(1-p) = p(1-p)^2 q$

以上を合わせてその確率は、 $(1-p)^2 q(2p+q)$

以下、 $n \geq 5$ とする。

(i)のとき、

2 回目から $n-1$ 回目のうち、隣接しない 2 か所が B であるものを数えて、

$${}_{n-2}C_2 - (n-3)(\text{通り})$$

このとき、1 回目に A が勝っており、

A→A が $n-5$ 回、A→B が 2 回、B→A が 2 回

あるので、その確率は全て、

$$p \cdot p^{n-5} \cdot (1-p)^2 \cdot q^2 = p^{n-4} (1-p)^2 q^2$$

$$\boxed{AA \cdots ABA \cdot ABA \cdots A}$$

(ii)のとき、

2 回目から $n-2$ 回目のうち、1 か所が B であるものを数えて、

$$n-3(\text{通り})$$

このとき、1 回目に A が勝っており、

A→A が $n-4$ 回、A→B が 2 回、B→A が 1 回

あるので、その確率は全て、

$$p \cdot p^{n-4} \cdot (1-p)^2 \cdot q = p^{n-3} (1-p)^2 q$$

$$\boxed{AA \cdots ABA \cdots \cdots AB}$$

(iii)のとき、

3 回目から $n-1$ 回目のうち、1 か所が B であるものを数えて、

$$n-3(\text{通り})$$

このとき、1 回目に B が勝っており、

A→A が $n-4$ 回、A→B が 1 回、B→A が 2 回

あるので、その確率は全て、

$$(1-p) \cdot p^{n-4} \cdot (1-p) \cdot q^2 = p^{n-4} (1-p)^2 q^2$$

$$\boxed{BAA \cdots \cdots ABA \cdots \cdots A}$$

(iv)のとき、

1 通りしかなく、1 回目に B が勝っており、

A→A が $n-3$ 回、A→B が 1 回、B→A が 1 回

あるので、その確率は全て、

$$(1-p) \cdot p^{n-3} \cdot (1-p) \cdot q = p^{n-3} (1-p)^2 q$$

$$\boxed{BAA \cdots \cdots \cdots AAB}$$

以上(i)～(iv)より、その和を計算することで求める確率は、

$$\begin{aligned} b_n &= \{ {}_{n-2}C_2 - (n-3) \} \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q^2 \\ &\quad + (n-3) \cdot p^{n-3} (1-p)^2 q \\ &\quad + (n-3) \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q^2 \\ &\quad + 1 \cdot p^{n-3} (1-p)^2 q \\ &= {}_{n-2}C_2 \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q^2 \\ &\quad + (n-2) \cdot p^{n-3} (1-p)^2 q \\ &= \{ {}_{n-2}C_2 \cdot q + (n-2)p \} \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q \\ &= \left\{ \frac{1}{2}(n-2)(n-3)q + (n-2)p \right\} \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q \\ &= \frac{1}{2}(n-2) \{ (n-3)q + 2p \} \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q \end{aligned}$$

この結果は $n=3$ のとき、 $(1-p)^2 q$

$n=4$ のとき、 $(q+2p)(1-p)^2 q$

となるので $n \geq 3$ で成立する。従って、

$$b_n = \frac{1}{2}(n-2) \{ (n-3)q + 2p \} \cdot p^{n-4} (1-p)^2 q \quad \cdots \text{答}$$