

①

(1) $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ のとき、

$$2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geq \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} \sin\left(x+y - \frac{\pi}{4}\right) \geq \sqrt{2}$$

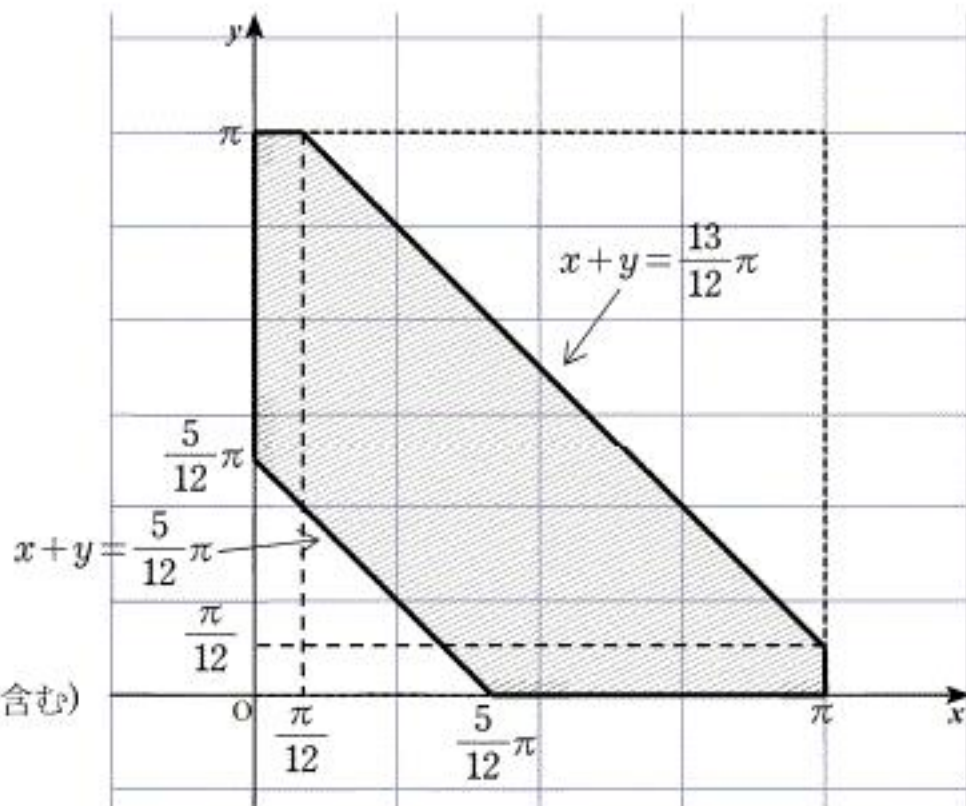
$$\sin\left(x+y - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

ここで $-\frac{\pi}{4} \leq x+y - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ なのので、

$$\frac{\pi}{6} \leq x+y - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{5}{12}\pi \leq x+y \leq \frac{13}{12}\pi$$

よって領域 D は図の斜線部分(境界はすべて含む)



(2) $2x+y=k$

とおく。

$$y = -2x + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

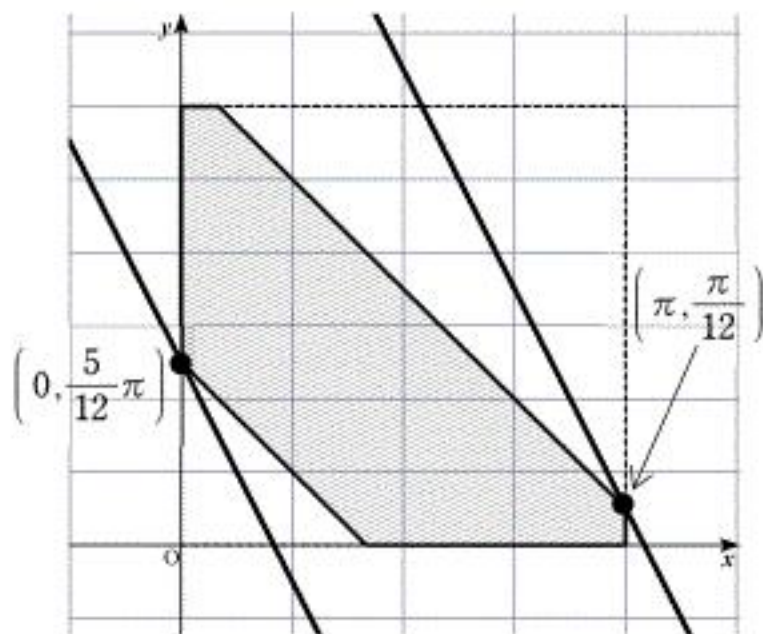
について、直線①と(1)で図示した領域 D が共有点をもつような k の値(①の y 切片)の最小・最大を調べればよい。すると、

①が点 $(0, \frac{5}{12}\pi)$ を通るとき、 k は最小となり、

$$k = 2 \cdot 0 + \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi \quad \cdots \text{答}$$

①が点 $(\pi, \frac{\pi}{12})$ を通るとき、 k は最大となり、

$$k = 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{12} = \frac{25}{12}\pi \quad \cdots \text{答}$$



[2]

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、

(1) ①の判別式を D とすると、

$$D = (2p + |p| - |p+1| + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1)$$

以下、 p で場合分けする。

(i) $p < -1$ のとき、 $|p| = -p$, $|p+1| = -p-1$ であり、

$$\begin{aligned} D &= (2p - p + p + 1 + 1)^2 - 2(2p - 3p + p + 1 - 1) \\ &= (2p + 2)^2 > 0 \end{aligned}$$

(ii) $-1 \leq p \leq 0$ のとき、 $|p| = -p$, $|p+1| = p+1$ であり、

$$\begin{aligned} D &= (2p - p - p - 1 + 1)^2 - 2(2p - 3p - p - 1 - 1) \\ &= 4(p+1) \geq 0 \end{aligned}$$

(iii) $p > 0$ のとき、 $|p| = p$, $|p+1| = p+1$ であり、

$$\begin{aligned} D &= (2p + p - p - 1 + 1)^2 - 2(2p + 3p - p - 1 - 1) \\ &= 4(p-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

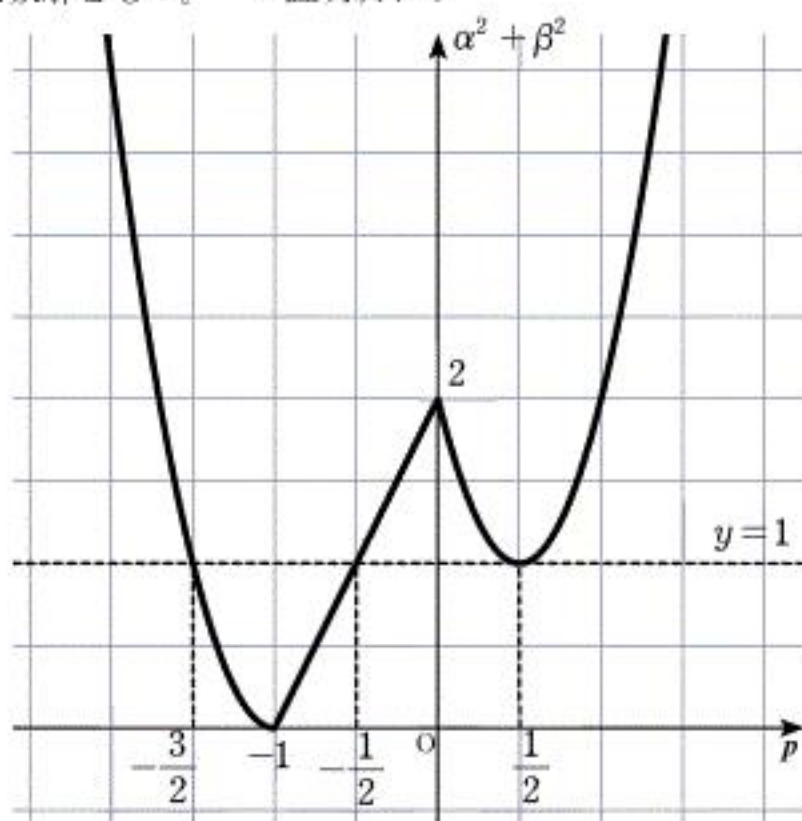
以上より p の値によらず $D \geq 0$ となるから、①は実数解をもつ。 $\cdots$ 証明終わり

$$\begin{aligned} (2) \quad \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= D + 2\alpha\beta \text{ より、} \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \begin{cases} (2p+2)^2 & (p < -1) \\ 2(p+1) & (-1 \leq p \leq 0) \\ 4\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 & (p > 0) \end{cases}$$

のグラフにより $D > 0$ かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ となる p の範囲を調べることで、

$$-\frac{3}{2} \leq p < -1, -1 < p \leq -\frac{1}{2}, p = \frac{1}{2} \quad \cdots \text{答}$$



[3]

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 6z + 21 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、①の左辺を $f(x,y,z)$ 、②の左辺を $g(x,y,z)$ とおく。このとき、

$$f(x,y,z) + kg(x,y,z) = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を考える。③は S_1, S_2 の共通部分 C をすべて通る図形を表す。

以下、これを示す。

まずは、

S_1 は中心が $(1,1,1)$ で半径が $\sqrt{7}$ の球面

S_2 は中心が $(2,3,3)$ で半径が1の球面

である。中心間の距離を d とすると、

$$d = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (3-1)^2} = 3$$

であり、

$$|1 - \sqrt{7}| < d < 1 + \sqrt{7}$$

が成立するので、確かに S_1 と S_2 は共通部分 C をもち、円である。

そこで、 C 上の任意の点の1つを (x_1, y_1, z_1) とすると、これは S_1 上の点でもあるから、

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

を満たす。同様に

$$g(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成立する。すると、③で $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ とすると、④、⑤より

$$f(x_1, y_1, z_1) + kg(x_1, y_1, z_1) = 0 + k \cdot 0 = 0$$

が成立するから、点 (x_1, y_1, z_1) は③が表す図形上に存在する。

以上から③は S_1, S_2 の共通部分 C をすべて通る図形である。

(1) $k \neq -1$ とする。このとき、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1+2k}{1+k}\right)^2 + \left(y - \frac{1+3k}{1+k}\right)^2 + \left(z - \frac{1+3k}{1+k}\right)^2 = \frac{k^2 - k + 7}{(1+k)^2} \quad \cdots \textcircled{6}$$

について、 $k^2 - k + 7 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$ であるから、これは中心が点 $\left(\frac{1+2k}{1+k}, \frac{1+3k}{1+k}, \frac{1+3k}{1+k}\right)$

である半径 $\sqrt{\frac{k^2 - k + 7}{(1+k)^2}}$ の球面である。

$$\frac{k^2 - k + 7}{(1+k)^2} = \frac{(1+k)^2 - 3(1+k) + 9}{(1+k)^2} = 9 \left\{ \left(\frac{1}{1+k}\right) - \frac{1}{6} \right\}^2 + \frac{3}{4}$$

よりこれは $\frac{1}{1+k} = \frac{1}{6}$ 、つまり $k = 5$ のとき最小となるから、

⑥で $k = 5$ として、

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad \cdots \text{答}$$

※ ⑥で $k = -1$ とすると、 $2x + 4y + 4z - 25 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$ となり、これは円 C を含む平面である。

S_1 の中心と⑦の距離を d として、

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 25|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{5}{2} \quad (\text{点と平面の距離})$$

から円 C の半径は $\sqrt{(\sqrt{7})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、これより $\sqrt{\frac{k^2 - k + 7}{(1+k)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を解いて $k = 5$ となる。

$$(2) \quad \frac{k^2 - k + 7}{(1+k)^2} = 3$$

を解く。

$$k^2 - k + 7 = 3(1+k)^2$$

$$2k^2 + 7k - 4 = 0$$

$$(2k-1)(k+4) = 0$$

$$k = \frac{1}{2}, -4$$

よって、⑥で $k = \frac{1}{2}$ として、

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = 3 \quad \cdots \text{答}$$

⑥で $k = -4$ として、

$$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = 3 \quad \cdots \text{答}$$