

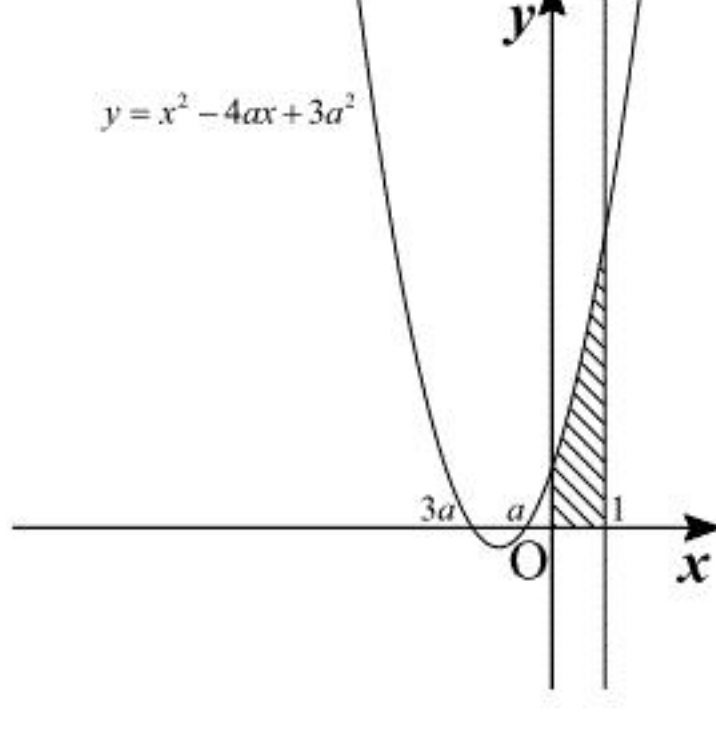
II

(1)

$x^2 - 4ax + 3a^2 = (x-a)(x-3a)$ より曲線 $y = x^2 - 4ax + 3a^2$ と x 軸の交点の x 座標は $x = a, 3a$ で

ある。以下、 a の値の範囲によって場合分けする。

[1] $a \leq 0$ のとき



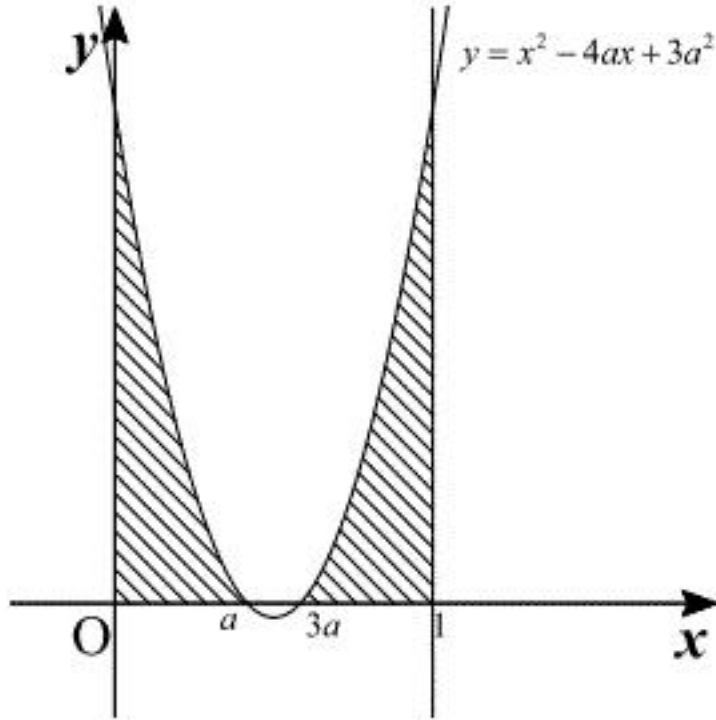
与えられた不等式を満たす領域は図の斜線部分であり、その面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 - 4ax + 3a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 3a^2x \right]_0^1 \\ &= 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $0 < a \leq \frac{1}{3}$ のとき

このとき、 $0 < a < 3a \leq 1$ であるから、与えられた不等式を満たす領域は以下の斜線部分のようになる。



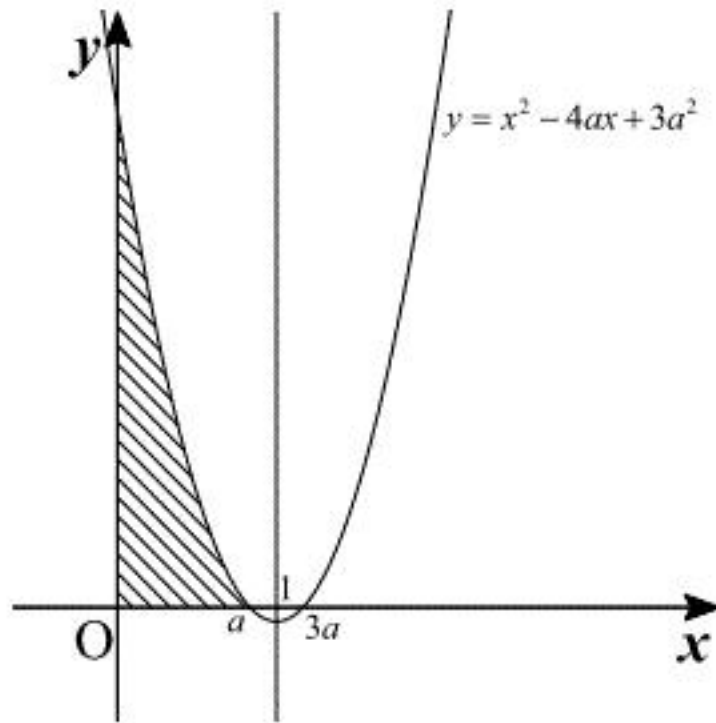
したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a (x^2 - 4ax + 3a^2) dx + \int_a^{3a} (x^2 - 4ax + 3a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 3a^2x \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 3a^2x \right]_a^{3a} \\ &= \left(\frac{1}{3}a^3 - 2a^3 + 3a^3 \right) + \left(\frac{1}{3} - 2a + 3a^2 \right) - \left(9a^3 - 18a^3 + 9a^3 \right) \\ &= \frac{4}{3}a^3 + 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

[3] $\frac{1}{3} < a < 1$ のとき

このとき、 $0 < a < 1 < 3a$ であるから、与えられた不等式を満たす領域は以下の斜線部分のようになる。

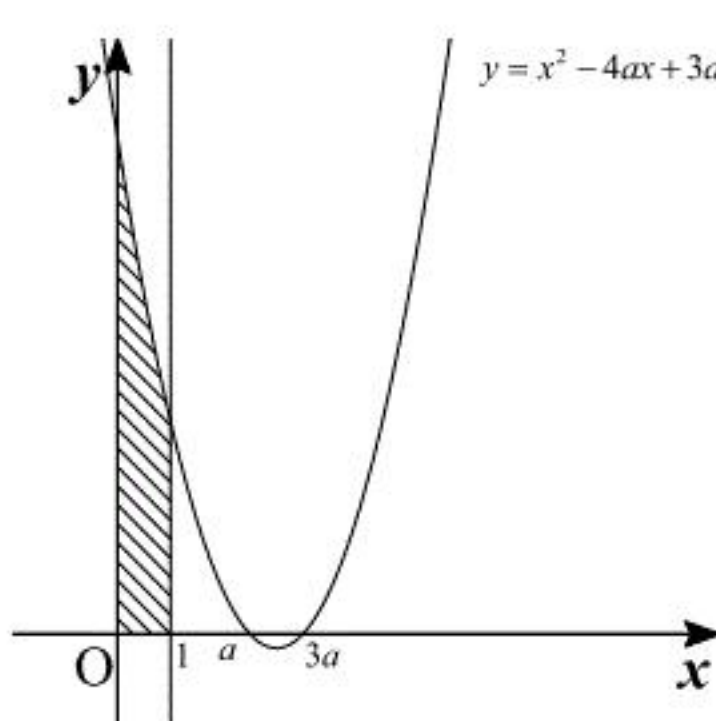


したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a (x^2 - 4ax + 3a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 3a^2x \right]_0^a \\ &= \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。

[4] $a \geq 1$ のとき



与えられた不等式を満たす領域は図の斜線部分であり、その面積は[1]の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 - 4ax + 3a^2) dx \\ &= 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4]より S は

$$a \leq 0, a \geq 1 \text{ のとき } 3a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

$$0 < a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき } \frac{4}{3}a^3 + 3a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} < a < 1 \text{ のとき } \frac{4}{3}a^3$$

となる。

$$a \leq 0, a \geq 1 \text{ のとき } S = 3a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

$$(\text{答}) \quad 0 < a \leq \frac{1}{3} \text{ のとき } S = \frac{4}{3}a^3 + 3a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} < a < 1 \text{ のとき } S = \frac{4}{3}a^3$$

(2)

[1] $a \leq 0$ のとき

$S = 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2$ であるから $a = 0$ のとき、最小値 $\frac{1}{3}$ をとる。

[2] $0 < a \leq \frac{1}{3}$ のとき

$$S = \frac{4}{3}a^3 + 3a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

であり、これを a の関数と見なして a で微分すると

$$\begin{aligned} S' &= 4a^2 + 6a - 2 \\ &= 4\left(a - \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(a - \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right) \end{aligned}$$

となるから、 $0 < a \leq \frac{1}{3}$ の範囲で増減表をかくと次のようになる。

a	0	...	$\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$	...	$\frac{1}{3}$
S'		-	0	+	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{4}{81}$

したがって、 $a = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ で最小値をとる。

[3] $\frac{1}{3} < a < 1$ のとき

$S = \frac{4}{3}a^3$ であるから、

$$\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 < S < \frac{4}{3} \cdot 1^3$$

$$\therefore \frac{4}{81} < S < \frac{4}{3}$$

である。

[4] $a \geq 1$ のとき

$S = 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2$ であるから $a = 1$ のとき、最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

以上[1], [2], [3], [4]より面積 S は、 $a = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ で最小となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

Ⅲ

〔解答〕

(ア)	$\frac{2\sqrt{2}-7}{4}$
(イ)	8
(ウ)	(2, 1)

〔解説〕

(1)

与式より、3倍角の公式および倍角の公式を用いて、

$$\begin{aligned}
 & 4\cos 15^\circ (1 - \sin^2 15^\circ - \sin 15^\circ) - 3(\sin 15^\circ + 1)\cos 15^\circ \\
 &= 4\cos 15^\circ (\cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ) - 3(\sin 15^\circ + 1)\cos 15^\circ \\
 &= (4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ) - 7\sin 15^\circ \cos 15^\circ \\
 &= \cos 45^\circ - \frac{7}{2}\sin 30^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}-7}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

学生の点数を高い方から、 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ とする。与えられた条件より

$$\begin{aligned}
 95 &= a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_M \geq 75 \\
 74 &\geq a_{M+1} \geq a_{M+2} \geq \dots \geq a_{100} = 25 \\
 a_1 + a_2 + \dots + a_{99} + a_{100} &= 7500
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 95M &\geq a_1 + a_2 + \dots + a_M && \dots \textcircled{1} \\
 74(99-M) + 25 &\geq a_{M+1} + a_{M+2} + \dots + a_{99} + a_{100} && \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となる。①+②より、

$$\begin{aligned}
 95M + 74(99-M) + 25 &\geq a_1 + a_2 + \dots + a_{99} + a_{100} = 7500 \\
 \Leftrightarrow 21M &\geq 149 \\
 \therefore M &\geq 7.09 \simeq
 \end{aligned}$$

となるから、この不等式を満たす最小の M は 8 である。実際、95 点の学生が 8 人、74 点の学生が 72 人、73 点の学生が 19 人、25 点の学生が 1 人いたとき、学生の合計は 100 人であり、

$$95 \times 8 + 74 \times 72 + 73 \times 19 + 25 \times 1 = 7500$$

より平均点が 75 点、最高点が 95 点、最低点が 25 点であり、平均点以上の学生数は 8 となる。したがって、求める M の最小値は 8 となる。

(3)

$y = x^3 - 3x$ に対して、

$$y' = 3x^2 - 3$$

であるから、曲線 $y = x^3 - 3x$ の $x = \alpha$ での接線の方程式は

$$y = (3\alpha^2 - 3)(x - \alpha) + \alpha^3 - 3\alpha = (3\alpha^2 - 3)x - 2\alpha^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様にして、 $x = \beta$ での接線の方程式は

$$y = (3\beta^2 - 3)x - 2\beta^3 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。条件より

$$3\alpha^2 - 3 = k, 3\beta^2 - 3 = -k \text{ または } 3\alpha^2 - 3 = -k, 3\beta^2 - 3 = k$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 (3\alpha^2 - 3) + (3\beta^2 - 3) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 &= 2
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $A = 2$ である。題意より①と②の交点を実数 γ を用いて $(\gamma, -1)$ とすると、

$$\begin{cases} -1 = (3\alpha^2 - 3)\gamma - 2\alpha^3 \\ -1 = (3\beta^2 - 3)\gamma - 2\beta^3 \end{cases}$$

となる。上の 2 式を足すと

$$-2 = \{3(\alpha^2 + \beta^2) - 6\}\gamma - 2(\alpha^3 + \beta^3)$$

であり、ここで $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 -2 &= -2(\alpha^3 + \beta^3) \\
 \therefore \alpha^3 + \beta^3 &= 1
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $B = 1$ である。したがって、 $(A, B) = (2, 1)$ である。

IV

(1)

(ii)の式に $x=y=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(0)+f(0) &= 2f(0)\times f(0) \\ \Leftrightarrow \{f(0)\}^2 - f(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(0)\{f(0)-1\} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで(i)より $f(0)\neq 0$ なので $f(0)=1$ である。

(証明終)

(2)

$x=p+q, y=p-q$ とする。このとき

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{(p+q)+(p-q)}{2} = p \\ \frac{x-y}{2} = \frac{(p+q)-(p-q)}{2} = q \end{cases}$$

となる。よって(ii)の式は

$$f(p+q)+f(p-q)=2f(p)\times f(q)$$

となる。条件より $f(p)=f(q)$ なので

$$f(p+q)+f(p-q)=2\{f(p)\}^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(p+q)+f(p-q)=2\{f(p)\}^2$$

(3)

題の命題を示すには

$$\begin{aligned} \{f(p+q)-1\}\{f(p-q)-1\} &= 0 \\ \Leftrightarrow f(p+q)f(p-q)-\{f(p+q)+f(p-q)\}+1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立することを示せばよい。 $x=2p, y=2q$ として(ii)の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(2p)+f(2q) &= 2f(p+q)\times f(p-q) \\ \Leftrightarrow f(p+q)f(p-q) &= \frac{1}{2}\{f(2p)+f(2q)\} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $x=2p, y=0$ として $f(0)=1$ を用いて(ii)の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(2p)+f(0) &= 2f(p)\times f(p) \\ \Leftrightarrow f(2p) &= 2\{f(p)\}^2 - 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、(ii)の式の対称性から、 $x=0, y=2q$ とすると

$$f(2q)=2\{f(q)\}^2 - 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。 $f(p)=f(q)$ を用いて、③+④を考えると

$$\begin{aligned} f(2p)+f(2q) &= 2\{f(p)\}^2 + 2\{f(q)\}^2 - 2 \\ &= 4\{f(p)\}^2 - 2 \end{aligned}$$

となる。これを②に代入すると

$$f(p+q)f(p-q)=2\{f(p)\}^2 - 1$$

であり、これと(2)の結果を①の左辺に代入すると

$$\left[2\{f(p)\}^2 - 1\right] - \left[2\{f(p)\}^2\right] + 1 = 0$$

となる。したがって、①は成立し、 $f(p+q)=1$ または $f(p-q)=1$ が成り立つ。

(証明終)

複素平面上で考えて、 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とする。よって、 $\alpha = a + bi$ である。点 A を原点を中心として 30° 回転させた点が点 B であるから

$$\beta = (a + bi)(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b\right) + i\left(\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

となる。題意より点 B の x 座標が $\sqrt{3} - 2$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = \sqrt{3} - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。一方で、点 C は点 B を原点を中心として -60° 回転させた点、つまり点 A を原点を中心として -30° 回転させた点であるから

$$\gamma = (a + bi)\{\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)\} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + i\left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

となる。題意より点 C の y 座標が $-1 + 2\sqrt{3}$ であるから

$$-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = -1 + 2\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①と②を連立して解くと点 $A(a, b) = (2, 4)$ である。

(答) $(a, b) = (2, 4)$