

I

〔解答〕

(1)	(a)
	11
(2)	(b)
	$\frac{11}{3}$
(3)	(c)
	25

〔解説〕

(1)

$\left(\frac{81}{80}\right)^{2011}$ の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{81}{80}\right)^{2011} &= 2011(\log_{10} 81 - \log_{10} 80) \\ &= 2011\{\log_{10} 3^4 - \log_{10}(2^3 \cdot 10)\} \\ &= 2011\{4\log_{10} 3 - (1 + 3\log_{10} 2)\} \\ &= 2011\{4 \cdot (0.47712) - 1 - 3 \cdot (0.30103)\} \\ &= 10.83929\end{aligned}$$

となるので、 $10 \leq \log_{10}\left(\frac{81}{80}\right)^{2011} < 11$ である。よって $\left(\frac{81}{80}\right)^{2011}$ の桁数は 11 である。

(2)

$y = |x| + |x-1|$ を x の大きさに場合分けして絶対値を外すと

$$y = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ 1 & (0 \leq x < 1) \\ -2x+1 & (x < 0) \end{cases}$$

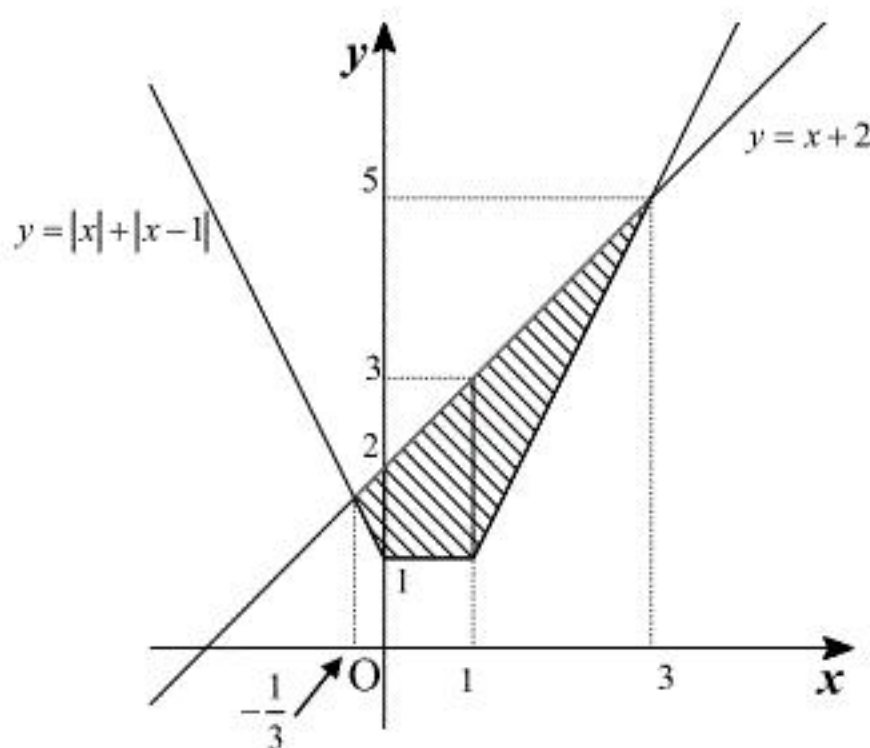
である。 $y = |x| + |x-1|$ と $y = x+2$ の交点の x 座標について考える。 $x \geq 1$ のときについて、 $y = 2x-1$ と $y = x+2$ を連立すると、

$$2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x=3$$

であり、これは $x \geq 1$ をみたす。よって交点は $(3, 5)$ である。また、 $x < 0$ のとき $y = -2x+1$ と $y = x+2$ を連立すると

$$-2x+1 = x+2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

となり、 $x < 0$ をみたす。よって交点は $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ である。以上より、 $y = |x| + |x-1|$ と $y = x+2$ のグラフをかくと以下のようなになる。



したがって、求める面積は上の図の斜線部分の面積に等しく、分けられた 3 つの図形の面積を足し合わせたものであるので、

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} (1+2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{11}{3}$$

である。

(3)

与式を計算すると

$$\begin{aligned}16 \sum_{k=1}^n k &= 5200 \\ \Leftrightarrow 16 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) &= 5200 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 650 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-25)(n+26) &= 0 \\ \therefore n &= 25 \quad (\because n > 0)\end{aligned}$$

となるので、求める n は $n=25$ である。

Ⅱ

(1)

3辺の長さが2, 3, 4であるので, ヘロンの公式より $s = \frac{1}{2}(2+3+4) = \frac{9}{2}$ とおくと,

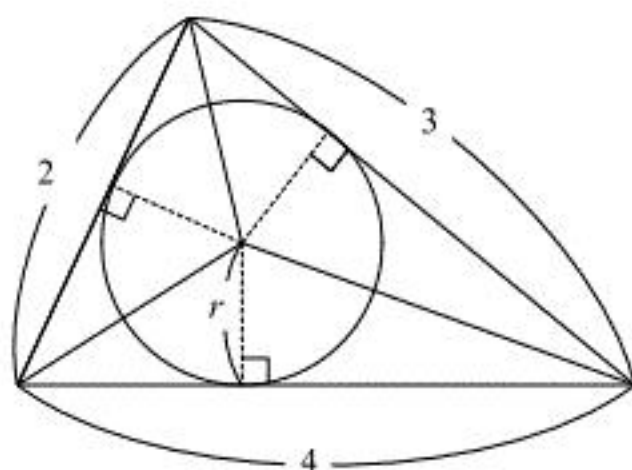
$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-2)(s-3)(s-4)} \\ &= \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

(2)

三角形とその内接円の図を描くと, 以下のようになる。



よって, 上の図より三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(2+3+4)r$$

と表せる。したがって, (1)との結果と合わせて

$$\begin{aligned} \frac{9}{2}r &= \frac{3\sqrt{15}}{4} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{15}}{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$

Ⅲ

〔解答〕

	(ア)
(1)	$\frac{m^3}{24}$
	(イ)
(2)	$\left(3, -\frac{1}{8}\right)$
	(ウ)
(3)	274

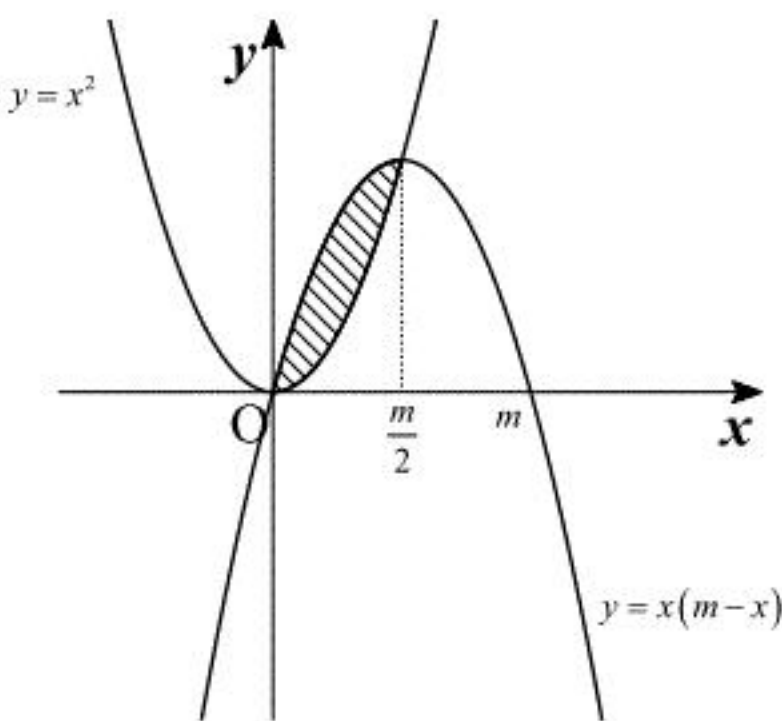
〔解説〕

(1)

$y = x^2$ と $y = x(m-x)$ の 2 式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= x(m-x) \\ \Leftrightarrow x(2x-m) &= 0 \\ \therefore x &= 0, x = \frac{m}{2} \end{aligned}$$

であるので $y = x^2$ と $y = x(m-x)$ のグラフは以下のようになる。



よって、求める面積 S は上図の斜線部分に等しく、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{m}{2}} \{x(m-x) - x^2\} dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{m}{2}} x \left(x - \frac{m}{2}\right) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{m}{2}\right)^3 - 0^3 \right\} \\ &= \frac{m^3}{24} \end{aligned}$$

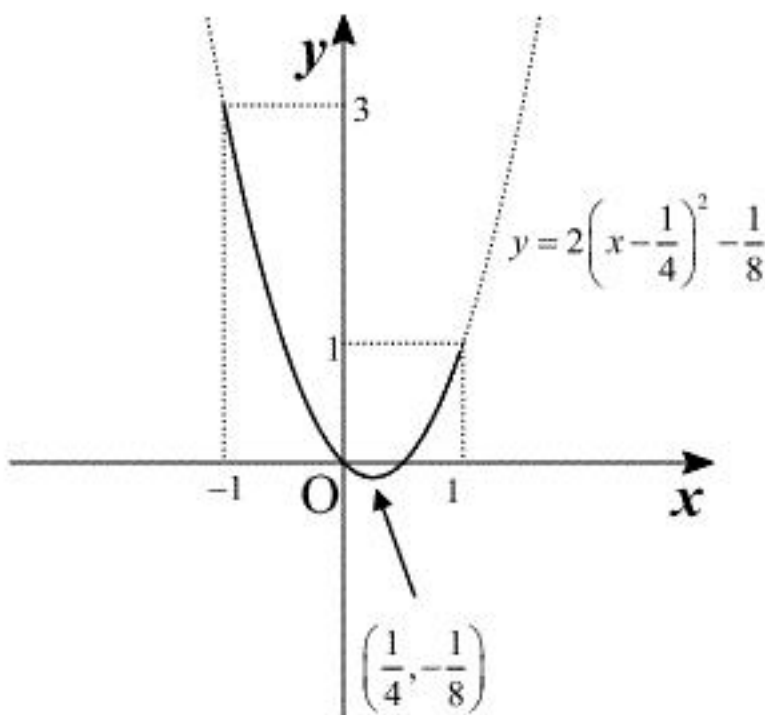
である。

(2)

$x = \cos \theta$ とおくと $-1 \leq x \leq 1$ であり、また、 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1$ であるので、

$$\begin{aligned} y &= \cos 2\theta - \cos \theta + 1 \\ &= (2x^2 - 1) - x + 1 \\ &= 2x^2 - x \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

である。グラフをかくと下図の実線部分のようになる。



したがってグラフより、 y は $x = -1$ のとき最大値 3 、 $x = \frac{1}{4}$ のとき最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる。よって、

$$(M, m) = \left(3, -\frac{1}{8}\right) \text{ である。}$$

(3)

n 段の階段を登る方法の総数を a_n 通りとする。 $n \geq 4$ のとき、 n 段目に登る方法は登り方で分類すると、

- [1] $(n-1)$ 段から、1 段飛ばしで登る場合
- [2] $(n-2)$ 段から、2 段飛ばしで登る場合
- [3] $(n-3)$ 段から、3 段飛ばしで登る場合

である。よって、

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

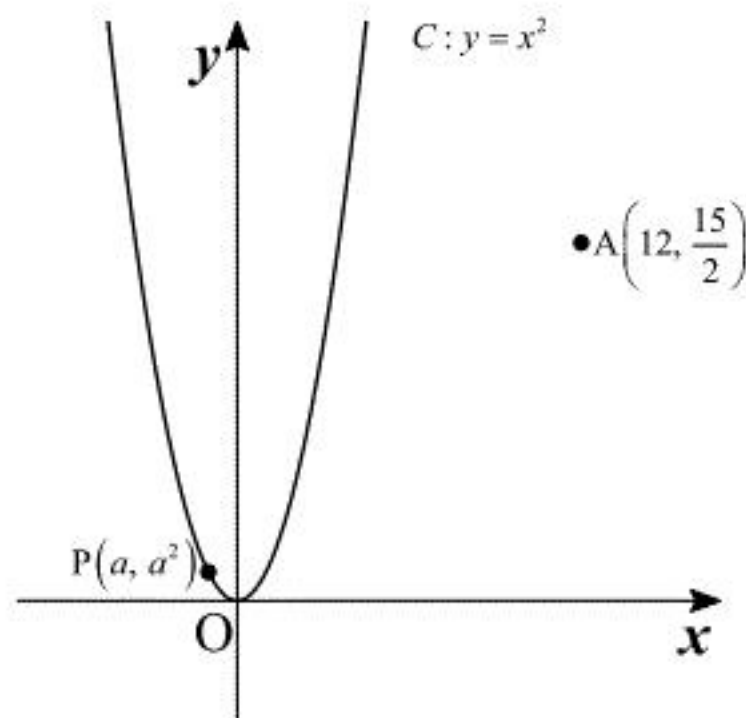
となる。また、 $a_1 = 1$ であり、2 段目への登り方は最初に 1 段飛ばしをするか、1 段目から 1 段登るかであるので、 $a_2 = 1 + a_1 = 2$ となる。3 段目への登り方は最初に 2 段飛ばしをするか、1 段目から 1 段飛ばしをするか、2 段目から 1 段登るかであるので、 $a_3 = 1 + a_1 + a_2 = 4$ となる。以上より、上の漸化式を用いて、 a_4 から順に求めていくと、

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 = 7 \\ a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 = 13 \\ a_6 &= a_5 + a_4 + a_3 = 24 \\ a_7 &= a_6 + a_5 + a_4 = 44 \\ a_8 &= a_7 + a_6 + a_5 = 81 \\ a_9 &= a_8 + a_7 + a_6 = 149 \\ a_{10} &= a_9 + a_8 + a_7 = 274 \end{aligned}$$

となるので、10 段を登る方法の総数は 274 通りである。

IV

実数 a を用いて、放物線 C 上の点 P の座標を $P(a, a^2)$ とおく。放物線 C と点 A, P は下図のよう
にそれぞれ位置する。



$y = x^2$ を x で微分すると $y' = 2x$ であるので、 P における接線の傾きは $2a$ である。ここで $a = 12$ のとき直線 AP は y 軸に平行になるが、点 P における接線の傾きは 24 となり接線は x 軸に平行にならない。よって、 $a \neq 12$ である。したがって、直線 AP の直線の傾きは

$\frac{\frac{15}{2} - a^2}{12 - a} = \frac{15 - 2a^2}{24 - 2a}$ ($\because a \neq 12$) である。よって、直交する 2 直線の傾きの積は -1 になるので、

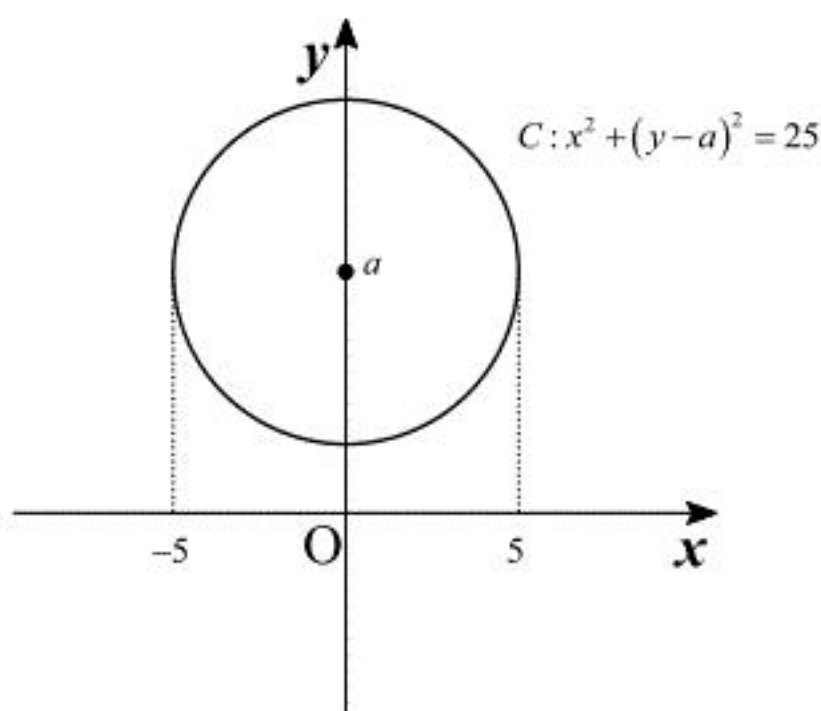
$$\begin{aligned} \frac{15 - 2a^2}{24 - 2a} \cdot 2a &= -1 \\ \Leftrightarrow 15a - 2a^3 &= a - 12 \\ \Leftrightarrow 2a^3 - 14a - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2)(a + 1)(a - 3) &= 0 \\ \therefore a &= -2, -1, 3 \end{aligned}$$

と導ける。したがって、これらは $a \neq 12$ を満たすので、求める点 P の座標は、
 $(-2, 4), (-1, 1), (3, 9)$ である。

(答) $(-2, 4), (-1, 1), (3, 9)$

V

$a > 5$ より、円 C は下図のようになる。



円 C を y 軸中心に回転してできる立体の体積を V_y とすると、 V_y は半径 5 の球の体積に等しいので、

$$V_y = \frac{4\pi}{3} \cdot 5^3 = \frac{500}{3} \pi$$

である。また、円 C を x 軸中心に回転してできる立体の体積を V_x とし、この立体を $x = t$ で切ったときの断面積を $S(t)$ とする。このとき $-5 \leq x \leq 5$ において C の式は

$$\begin{aligned} x^2 + (y-a)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow y &= a \pm \sqrt{25-x^2} \end{aligned}$$

とかけるので、 $S(t)$ は、半径 $a + \sqrt{25-t^2}$ の円から、半径 $a - \sqrt{25-t^2}$ の円を取り除いた部分の面積に等しい。ゆえに、

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi \left\{ \left(a + \sqrt{25-t^2} \right)^2 - \left(a - \sqrt{25-t^2} \right)^2 \right\} \\ &= 4\pi a \sqrt{25-t^2} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} V_x &= \int_{-5}^5 S(t) dt \\ &= 4\pi a \int_{-5}^5 \sqrt{25-t^2} dt \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_{-5}^5 \sqrt{25-t^2} dt$ は半径 5 の半円の面積 $\frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{2} \pi$ に等しいため、

$$\begin{aligned} V_x &= 4\pi a \cdot \frac{25}{2} \pi \\ &= 50\pi^2 a \end{aligned}$$

となる。よって 問題の条件より

$$\begin{aligned} 5V_x &= V_y \\ \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{500}{3} \pi &= 50\pi^2 a \\ \therefore a &= \frac{50}{3\pi} \end{aligned}$$

である。