

【解答】

|     |                                |
|-----|--------------------------------|
| (1) | (a)                            |
|     | $\left(13, \frac{3}{4}\right)$ |
| (2) | (b)                            |
|     | (2493, 182)                    |
| (3) | (c)                            |
|     | $\frac{1-2t}{t}$               |

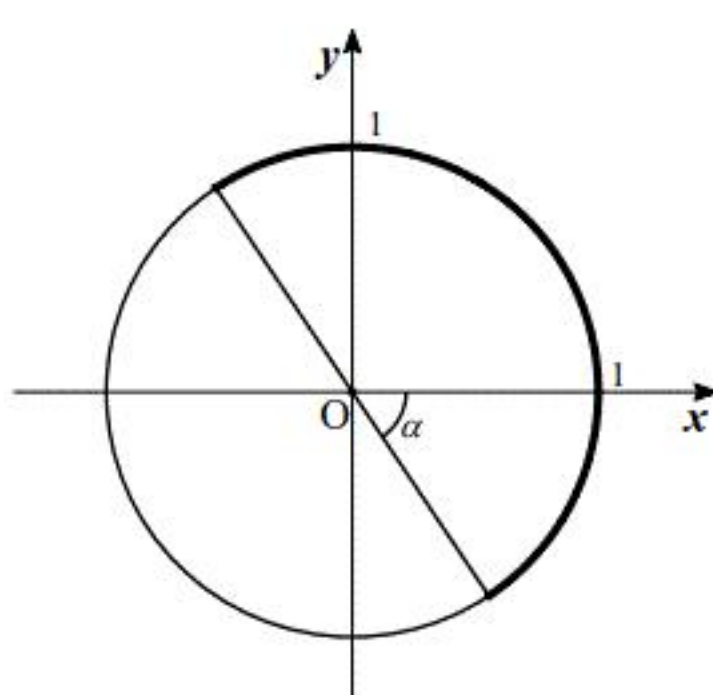
【解説】

(1)(a)

 $x = 2\sin\theta - 3\cos\theta$  とおくと、三角関数の合成公式より、

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(\theta + \alpha) \\ &= \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。ただし、 $\alpha$  は  $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ,  $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$   $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$  を満たす実数である。



ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$  であることから、 $\alpha \leq \theta + \alpha \leq \pi + \alpha$  であるので、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  と合わせて

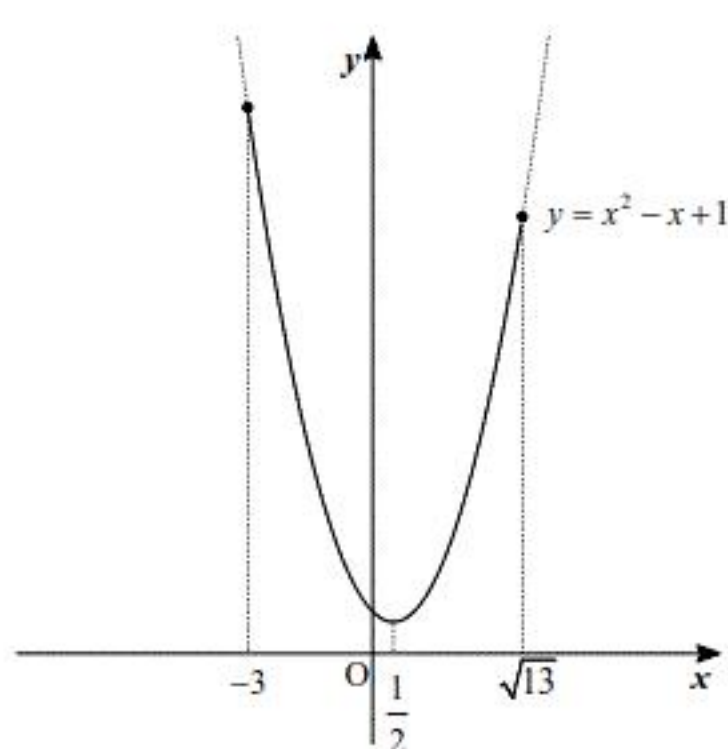
考えると、 $\theta + \alpha$  が表す円周は上図の太線の部分を動く。よって

$$\begin{aligned} \sin\alpha \leq \sin(\theta + \alpha) \leq \sin\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{13}} \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x \leq \sqrt{13} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y$  を平方完成すると、

$$\begin{aligned} y &= x^2 - x + 1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と表すことができる。したがって、 $-3 \leq x \leq \sqrt{13}$  よりグラフは下の図のようになる。



ここで、 $f(x) = x^2 - x + 1$  とおくと  $f(-3)$ ,  $f(\sqrt{13})$  の大小関係について、

$$\begin{aligned} f(-3) - f(\sqrt{13}) &= 13 - (14 - \sqrt{13}) \\ &= \sqrt{13} - 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であることから、 $f(-3) > f(\sqrt{13})$  となる。これより、 $y = f(x)$  は、 $x = -3$  のとき最大値

$M = 13$  をとり、 $x = \frac{1}{2}$  のとき最小値  $m = \frac{3}{4}$  をとる。よって、 $(M, m) = \left(13, \frac{3}{4}\right)$  である。

(2)

 $x^2 - 4x - 3 = 0$  を解くと、

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - (-3)} = 2 \pm \sqrt{7}$$

となり、いま  $x > 0$  であることから、 $x = 2 + \sqrt{7}$  である。また

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4x + 3$$

が成立するので、

$$\begin{aligned} 2x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 2x + 2012 &= 2(x^2)^2 + x^2 + 2x + 2012 \\ &= 2(4x+3)^2 + (4x+3) + 2x + 2012 \\ &= 32x^2 + 54x + 2033 \\ &= 32(4x+3) + 54x + 2033 \\ &= 182x + 2129 \\ &= 182(2 + \sqrt{7}) + 2129 \\ &= 2493 + 182\sqrt{7} \end{aligned}$$

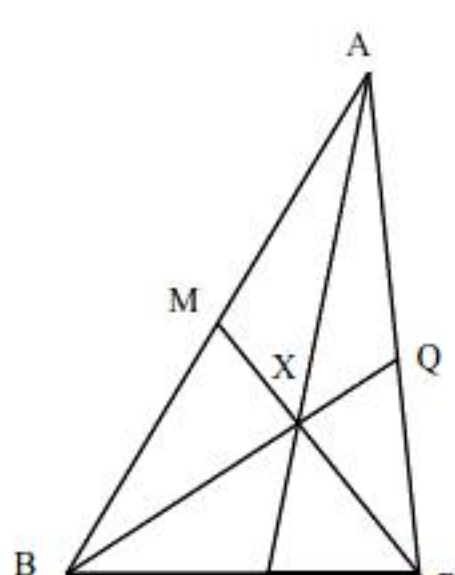
と導ける。よって、

$$(p, q) = (2493, 182)$$

である。

(3)

$\triangle ABC$  と点  $M, P, Q, X$  を図示すると、以下のようになる。



$CP = s (> 0)$  とおく。  $\triangle ABC$  と直線  $MP$  についてメネラウスの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CX}{XA} &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{t}{1-t} &= 1 \\ \Leftrightarrow t(s+2) &= s(1-t) \\ \Leftrightarrow s(1-2t) &= 2t \\ \Leftrightarrow s &= \frac{2t}{1-2t} \left( \because 0 < t < \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore CP = \frac{2t}{1-2t}$$

と導ける。また、 $\triangle ABP$  についてチェバの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BC}{CP} \cdot \frac{PQ}{QA} &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{2}{\frac{2t}{1-2t}} \cdot \frac{PQ}{QA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{PQ}{QA} &= \frac{t}{1-2t} \\ \therefore PQ:QA &= t:(1-2t) \end{aligned}$$

となる。これより、 $\triangle BPQ$  と直線  $AC$  についてメネラウスの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{BC}{CP} \cdot \frac{PA}{AQ} \cdot \frac{QX}{XB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{2t}{1-2t}} \cdot \frac{1-t}{1-2t} \cdot \frac{QX}{XB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{QX}{XB} &= \frac{t}{1-t} \\ \therefore QX:XB &= t:(1-t) \end{aligned}$$

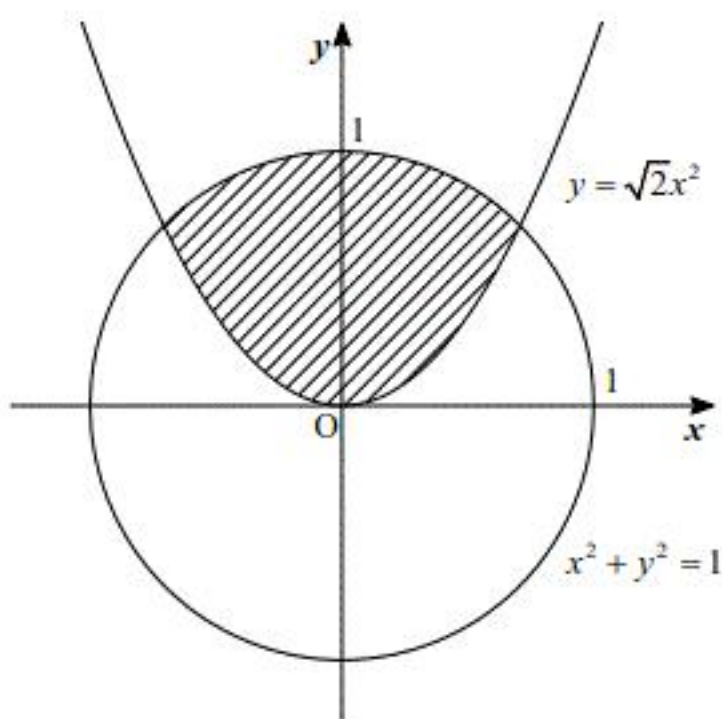
と求めることができる。したがって、 $S_1, S_2$  について

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{BC}{BP} \cdot \triangle BPX \\ &= \frac{BC}{BP} \cdot \frac{BX}{BQ} \cdot \triangle BPQ \\ &= \frac{2}{\frac{2(1-t)}{1-2t}} \cdot (1-t) \cdot \triangle BPQ \\ &= (1-2t) \cdot \triangle BPQ \\ S_2 &= \frac{XQ}{BQ} \cdot \triangle BPQ = t \cdot \triangle BPQ \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1-2t}{t}$$

である。



求める面積は、上図の斜線部分の面積である。ただし、境界線を含む。 $x^2 + y^2 = 1$ と $y = \sqrt{2}x^2$ の交点( $x > 0$ )について考える。 $x^2 + y^2 = 1$ に $y = \sqrt{2}x^2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{2}x^2)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 1)(x^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

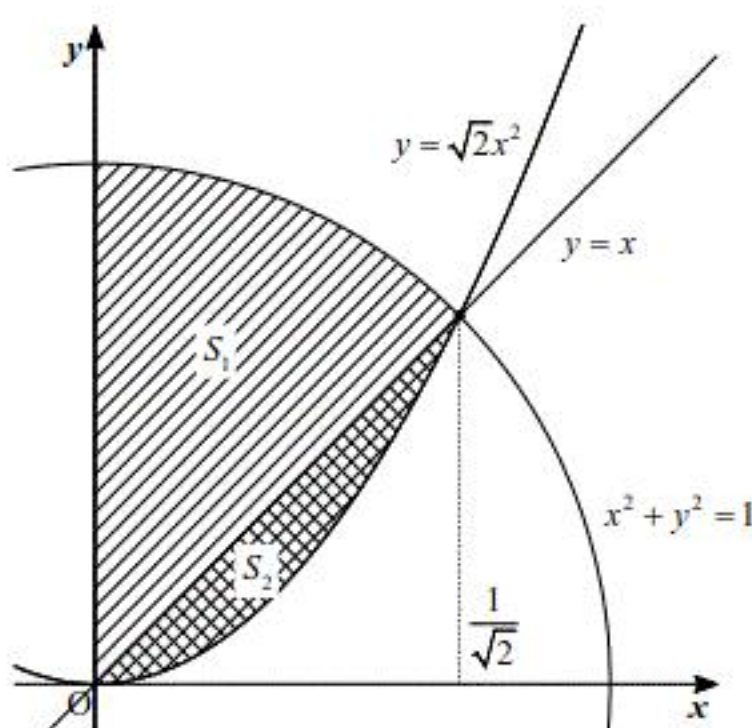
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad (\because x^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。ゆえに $x > 0$ となる、2曲線の交点は

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

である。



ここで、 $x^2 + y^2 = 1$ と $y = \sqrt{2}x^2$ の $y$ 軸対称性から、斜線部分も $y$ 軸対称である。斜線部分の $x \geq 0$ の部分に着目すると、上図のように $y = x$ によって、中心角 $\frac{\pi}{4}$ の扇形と、 $y = \sqrt{2}x^2$ ,  $y = x$ によって囲まれる部分とに分けられる。面積をそれぞれ $S_1$ ,  $S_2$ とおくと、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 = \frac{\pi}{8} \\ S_2 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ x - (\sqrt{2}x^2) \right\} dx \\ &= -\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。よって、求める面積は

$$2(S_1 + S_2) = 2 \left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

|     |                 |
|-----|-----------------|
| (1) | (ア)             |
|     | $5 \leq x$      |
| (2) | (イ)             |
|     | $\sqrt{3}$      |
| (3) | (ウ)             |
|     | $\frac{34}{91}$ |

〔解説〕

(1)

真数条件より、

$$\begin{aligned} x+2 > 0 \text{ かつ } \sqrt{6x+19} > 0 \\ \Leftrightarrow x > -2 \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \text{①} \end{aligned}$$

である。また、与えられた不等式を変形すると

$$\begin{aligned} \log_{10}(x+2) - \log_{10}\sqrt{6x+19} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \log_{10}(x+2) &\geq \log_{10}\sqrt{6x+19} \end{aligned}$$

となる。底は  $10 > 1$  であるので、

$$\begin{aligned} \log_{10}(x+2) &\geq \log_{10}\sqrt{6x+19} \\ \Leftrightarrow x+2 &\geq \sqrt{6x+19} \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 &\geq (6x+19) \left( \because \sqrt{6x+19} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)(x+3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -3, 5 \leq x \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \text{②} \end{aligned}$$

と導ける。よって、①と②の共通範囲をとって、

$$5 \leq x$$

である。

(2)

$\angle ABC = 90^\circ$  だから、 $\triangle ABC$  において三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

である。したがって、 $\angle ACG = 90^\circ$  だから  $\triangle ACG$  において三平方の定理より、

$$AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{3}$$

である。

(3)

異なる 15 枚の中から 3 枚を選ぶ場合の総数は、 ${}_{15}C_3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$  (通り) であり、これらは

同様に確からしい。また、商品券 3 枚の商品券の合計が 15000 円以上になるのは以下の場合である。

[1] 10000 円 3 枚の場合

商品券 3 枚の発行年がすべて異なることに注意すると、取り出し方は、

$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 10000 円 2 枚と 5000 円 1 枚の場合

[1] と同様に考えると、取り出し方は、 ${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 3 = 30$  (通り) である。

[3] 10000 円 2 枚と 1000 円 1 枚の場合

[1] と同様に考えると、取り出し方は、 ${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 3 = 30$  (通り) である。

[4] 10000 円 1 枚と 5000 円 2 枚の場合

[1] と同様に考えると、取り出し方は、 ${}_5C_1 \cdot {}_4C_2 = 5 \cdot 6 = 30$  (通り) である。

[5] 10000 円 1 枚と 5000 円 1 枚と 1000 円 1 枚の場合

[1] と同様に考えると、取り出し方は、 ${}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  (通り) である。

[6] 5000 円 3 枚の場合

[1] と同様に考えると、取り出し方は、 ${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$  (通り) である。

以上、[1]～[6] は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\frac{10+30+30+30+60+10}{455} = \frac{34}{91}$$

である。

# IV

(1)

$-1 < x < 1$ ,  $-1 < q < 1$  から,  $-1 < qx < 1$  である。ゆえに  $f_q(x) = \frac{x-q}{1-qx}$  について,

$$\begin{aligned} 1 - f_q(x) &= 1 - \frac{x-q}{1-qx} \\ &= \frac{1-x+q-qx}{1-qx} \\ &= \frac{(1-x)(1+q)}{1-qx} \\ &> 0 \quad (\because 1-qx > 0, 1-x > 0, 1+q > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_q(x) - (-1) &= \frac{x-q}{1-qx} + 1 \\ &= \frac{-qx+x-q+1}{1-qx} \\ &= \frac{(1+x)(1-q)}{1-qx} \\ &> 0 \quad (\because 1-qx > 0, 1+x > 0, 1-q > 0) \end{aligned}$$

である。よって,  $-1 < x < 1$  を満たすすべての  $x$  について

$$-1 < f_q(x) < 1$$

が成立する。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} f_p(f_q(x)) &= \frac{f_q(x) - p}{1 - pf_q(x)} \\ &= \frac{\frac{x-q}{1-qx} - p}{1 - p \cdot \frac{x-q}{1-qx}} \\ &= \frac{x-q-p(1-qx)}{(1-qx) - p(x-q)} \\ &= \frac{(1+pq)x - (p+q)}{(1+pq) - (p+q)x} \\ &= \frac{x - \frac{p+q}{1+pq}}{1 - \frac{p+q}{1+pq}x} \end{aligned}$$

と変形できる。これが  $\frac{x-r}{1-rx}$  に等しいので,

$$r = \frac{p+q}{1+pq}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad r = \frac{p+q}{1+pq}$$

ここで, (1) より  $-1 < -q < 1$  のとき,  $-1 < x < 1$  を満たすすべての  $x$  について

$$-1 < \frac{x - (-q)}{1 - (-q)x} < 1$$

が成立する。したがって,  $-1 < p < 1$  より

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{p - (-q)}{1 - (-q)p} < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< \frac{p+q}{1+pq} < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< r < 1 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

(2) より  $r = \frac{p+q}{1+pq}$ ,  $-1 < r < 1$  であるから,  $f_p(f_q(x)) = f_q(x)$  より,

$$\begin{aligned} \frac{p+q}{1+pq} &= q \\ \Leftrightarrow p+q &= q(1+pq) \\ \Leftrightarrow p(1-q^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 0 \quad (\because -1 < q < 1 \text{ より } 1-q^2 > 0) \end{aligned}$$

である。

(答) 0

# V

(1)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (y \geq 0) \text{ より,}$$

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

と変形できる。したがって、求める面積  $S$  は、グラフが  $y$  軸対称であることを考えて

$$S = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

となる。ここで、 $x = 2 \sin \theta$  とおくと、 $x$  と  $\theta$  は以下のように対応する。

|          |     |               |                 |
|----------|-----|---------------|-----------------|
| $x$      | $0$ | $\rightarrow$ | $2$             |
| $\theta$ | $0$ | $\rightarrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |

また、 $x = 2 \sin \theta$  より、 $dx = 2 \cos \theta d\theta$  である。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (2 \sin \theta)^2} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \end{aligned}$$

(答)  $\pi$

(2)

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \text{ であることから, 求める体積は}$$

$$\begin{aligned} \pi \int_{-2}^2 y^2 dx &= 2\pi \int_0^2 \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= 2\pi \left[ x - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{8}{3} \pi$