

I

〔解答〕

(1)	(a)
	$\frac{2013}{8}$
(2)	(b)
	$\sqrt{n+1}$
(3)	(c)
	$\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

〔解説〕

(1)

$$2x+y=\sqrt{2013} \text{ より,}$$

$$y=-2x+\sqrt{2013}$$

となる。よってこれを用いると,

$$\begin{aligned} xy &= x(-2x+\sqrt{2013}) \\ &= -2x^2+\sqrt{2013}x \\ &= -2\left(x-\frac{\sqrt{2013}}{4}\right)^2+\frac{2013}{8} \end{aligned}$$

となる。 x, y は実数であるから, xy の最大値は $x=\frac{\sqrt{2013}}{4}$ のときに $\frac{2013}{8}$ となる。

(2)

$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} &= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)} \\ &= \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} &= \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{1}-0)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$t=\sin x+\cos x$ より t^3 を計算すると

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sin x+\cos x)^3 \\ &= \sin^3 x+3\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x+\cos^3 x \\ &= \sin^3 x+\cos^3 x+3\sin x\cos x(\sin x+\cos x) \\ &= \sin^3 x+\cos^3 x+3t\sin x\cos x \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^3 x+\cos^3 x=t^3-3t\sin x\cos x$$

となる。また, t^2 を計算すると

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x+\cos x)^2 \\ &= \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x \\ &= 1+2\sin x\cos x \end{aligned}$$

$$\therefore \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

となる。よって y を t の関数として表すと

$$\begin{aligned} y &= \sin^3 x+\cos^3 x \\ &= t^3-3t\sin x\cos x \\ &= t^3-3t\cdot\frac{t^2-1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} t &= \sin x+\cos x \\ &= \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となり, $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ であるから $\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3}{4}\pi$ となる。よって

$$1\leq t\leq\sqrt{2}$$

となる。 $y=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}(t^2-1) \\ &= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

となる。よって増減表を書くと下表のようになる。

t	1	...	$\sqrt{2}$
y'	0	-	-
y	M	$\searrow$	m

よって $t=1$ のときに最大値をとり, その値 M は

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。また, $t=\sqrt{2}$ のときに最小値をとり, その値 m は

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^3+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \\ &= -\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

II

(1)

$\cos 5\theta = \cos(2\theta + 3\theta)$ として変形すると

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos(2\theta + 3\theta) \\ &= \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1)(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) - 2\sin \theta \cos \theta (3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) \\ &= 8\cos^5 \theta - 6\cos^3 \theta - 4\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 6\sin^2 \theta \cos \theta + 8\sin^4 \theta \cos \theta \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 6(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta + 8(1 - \cos^2 \theta)^2 \cos \theta \\ &= 8\cos^5 \theta - 10\cos^3 \theta + 3\cos \theta - 6\cos \theta + 6\cos^3 \theta + 8\cos \theta - 16\cos^3 \theta + 8\cos^5 \theta \\ &= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$x = \cos \frac{2\pi}{5}$ とすると(1)より $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ となる。この左辺を因数分解すると

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = (x-1)(16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1)$$

となる。また $(ax^2 + bx + c)^2$ を展開して

$$(ax^2 + bx + c)^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$$

となる。よって

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$$

となり、これが x についての恒等式になるためには、係数を比較して

$$\begin{cases} a^2 = 16 & \dots \textcircled{1} \\ 2ab = 16 & \dots \textcircled{2} \\ b^2 + 2ac = -4 & \dots \textcircled{3} \\ 2bc = -4 & \dots \textcircled{4} \\ c^2 = 1 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

となればよい。①と $a > 0$ より

$$a = 4$$

となる。これを②に代入して

$$\begin{aligned}2 \cdot 4b &= 16 \\ \Leftrightarrow 8b &= 16 \\ \therefore b &= 2\end{aligned}$$

となる。 $b = 2$ を④に代入して

$$\begin{aligned}2 \cdot 2c &= -4 \\ \Leftrightarrow 4c &= -4 \\ \therefore c &= -1\end{aligned}$$

となる。このとき、 $(a, b, c) = (4, 2, -1)$ は①~⑤をすべて満たすので十分である。

(答) $a = 4, b = 2, c = -1$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}(x-1)(4x^2 + 2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-1 &= 0, 4x^2 + 2x - 1 = 0 \\ \therefore x &= 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ より $0 < x < 1$ であるから、 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ である。

(答) $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

Ⅲ

【解答】

(1)	(ア)
	$\frac{-1\pm\sqrt{145}}{12}$
(2)	(イ)
	$\frac{7}{47}$
(3)	(ウ)
	$2^{\frac{2}{3}}$

【解説】

(1)

$2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$ を計算すると

$$\begin{aligned}2\vec{a}-3\vec{b} &= 2(-1, 2)-3(x, 1) \\&= (-2-3x, 4-3) \\&= (-3x-2, 1) \\ \vec{a}+2\vec{b} &= (-1, 2)+2(x, 1) \\&= (-1+2x, 2+2) \\&= (2x-1, 4)\end{aligned}$$

となる。 $2\vec{a}-3\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が垂直になるとき、この2つのベクトルの内積が0になる。よって

$$\begin{aligned}(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3x-2, 1)\cdot(2x-1, 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3x-2)(2x-1)+1\cdot 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -6x^2+3x-4x+2+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x^2+x-6 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 6\cdot(-6)}}{2\cdot 6} \\&= \frac{-1\pm\sqrt{145}}{12}\end{aligned}$$

となる。

(2)

50 個の玉から4 個の玉をとり出すのでとり出し方は、 ${}_{50}\text{P}_4=50\cdot 49\cdot 48\cdot 47$ であり、これらは同様に確からしい。事象 A を壺から1 個ずつ玉を戻さずに4 回とり出したら2 回目から4 回目が赤玉である事象とし、事象 B を最初に1 個とり出して箱にしまった玉が赤玉である事象とする。求める確率は条件付き確率 $P_A(B)$ である。よって

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

となる。 $P(A\cap B)$ を求めると、50 個の玉の中から赤玉を4 回連続でとる確率であるから

$$P(A\cap B)=\frac{{}_{10}\text{P}_4}{{}_{50}\text{P}_4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}$$

となる。 $P(A)$ を求めると、箱に入れた玉が赤玉かそうでないかの場合を考え

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A\cap B)+\frac{40\cdot {}_{10}\text{P}_3}{{}_{50}\text{P}_4} \\&= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}+\frac{40\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47} \\&= \frac{(7+40)\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47} \\&= \frac{47\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}\end{aligned}$$

となる。よって $P_A(B)$ は

$$\begin{aligned}P_A(B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\&= \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}}{\frac{47\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}} \\&= \frac{7}{47}\end{aligned}$$

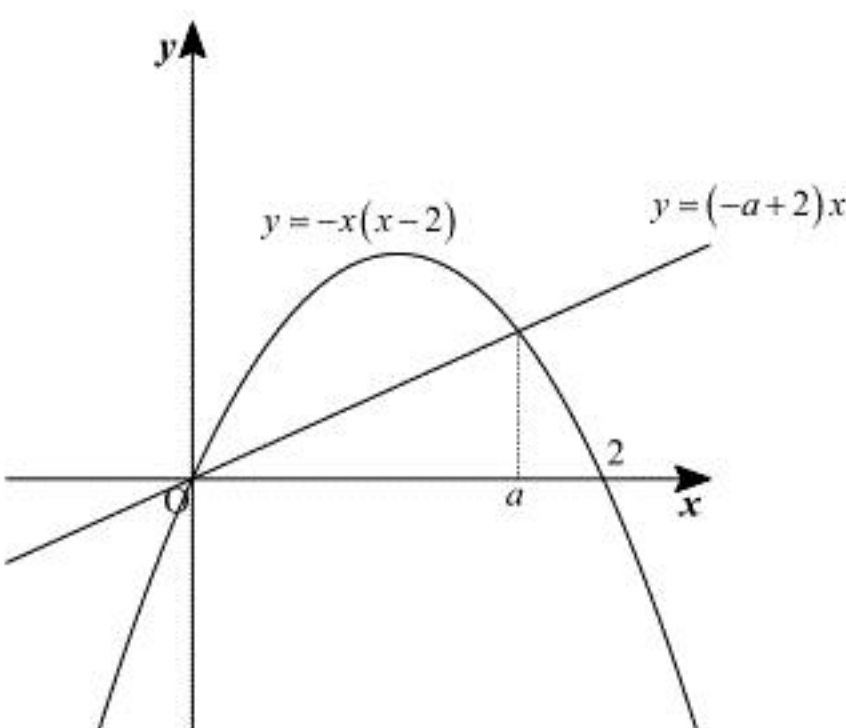
となる。

(3)

曲線 $y=-x(x-2)$ と直線 $y=(-a+2)x$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}-x(x-2) &= (-a+2)x \\ \Leftrightarrow -x^2+2x &= -ax+2x \\ \Leftrightarrow x^2-ax &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-a) &= 0 \\ \therefore x &= 0, a\end{aligned}$$

となる。よって曲線 $y=-x(x-2)$ と x 軸とで囲まれた面積を直線 $y=(-a+2)x$ が2 等分するとき、 $0<a<2$ が必要であり、曲線 $y=-x(x-2)$ と直線 $y=(-a+2)x$ を図示すると下図のようになる。



曲線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた面積を S_1 、曲線 $y=-x(x-2)$ と直線 $y=(-a+2)x$ で囲まれた面積を S_2 とする。 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_0^2 \{-x(x-2)\} dx \\&= \frac{1}{6}(2-0)^3 \\&= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。また、 S_2 は

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_0^a \{-x(x-2)-(-a+2)x\} dx \\&= \int_0^a \{-x(x-a)\} dx \\&= \frac{1}{6}(a-0)^3 \\&= \frac{1}{6}a^3\end{aligned}$$

となる。曲線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた面積を、直線 $y=(-a+2)x$ が2 等分するとき、

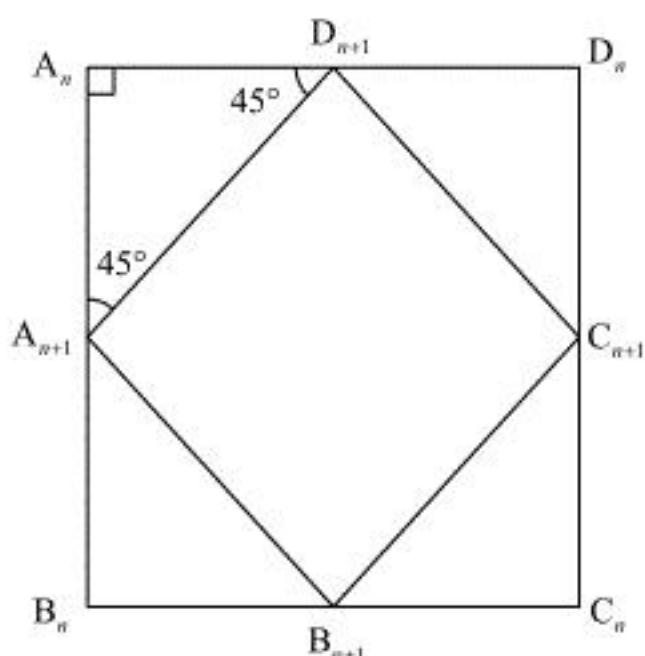
$$\frac{1}{2}S_1=S_2 \text{ となるから}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot \frac{4}{3} &= \frac{1}{6}a^3 \\ \Leftrightarrow a^3 &= 4 \\ \therefore a &= 2^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

となる。

IV

正方形 $A_n B_n C_n D_n$ と正方形 $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ について考える。



正方形 $A_n B_n C_n D_n$ の1辺の長さを a_n と表す。 $\triangle A_n A_{n+1} D_{n+1}$ は $\angle A_n A_{n+1} D_{n+1} = 45^\circ$ の直角二等辺三角形となるから、

$$a_{n+1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n$$

となる。ゆえに数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 、公比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の等比数列となるので一般項は

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} a_1$$

である。 $\frac{S_n}{S_1}$ を求めると

$$\frac{S_n}{S_1} = \frac{(a_n)^2}{(a_1)^2} = \frac{\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} a_1 \right\}^2}{(a_1)^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

となる。これが $\frac{1}{100}$ 以下となるとき

$$\frac{S_n}{S_1} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 100$$

となる。両辺に底を10とする対数をとって

$$\log_{10} 2^{n-1} \geq \log_{10} 100$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \log_{10} 2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{2}{\log_{10} 2} = 1 + \frac{2}{0.301} = 7.64 \dots$$

となる。よって $n=8$ のときに初めて $\frac{S_n}{S_1}$ が $\frac{1}{100}$ 以下となる。また、点 $A_1, A_2, A_3, \dots$ は点 O を

中心に反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ ずつ回転しているので、 A_8 は $\frac{\pi}{4} \cdot (8-1) = \frac{7\pi}{4}$ 回転しており、

$$\angle A_1 O A_8 = \frac{\pi}{4}$$

である。

(答) $n=8$, $\angle A_1 O A_8 = \frac{\pi}{4}$

V

(1)

C_1 と C_2 が第一象限で接するとき、接線の傾きが等しく接点の x 座標は正である。よって接点の x 座標は

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{3}\right)' &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + a\right)' \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} &= -x^2 \\ \Leftrightarrow x^4 &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。接点は C_1 上にあるから接点の y 座標は

$$y = \frac{1}{1} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

となる。また、接点は C_2 上にあるから

$$\begin{aligned}\frac{7}{3} &= -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + a \\ \Leftrightarrow \frac{7}{3} &= -\frac{1}{3} + a \\ \therefore a &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{8}{3}$

(2)

$a = \frac{8}{3}$ のとき、 C_2 は

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3}$$

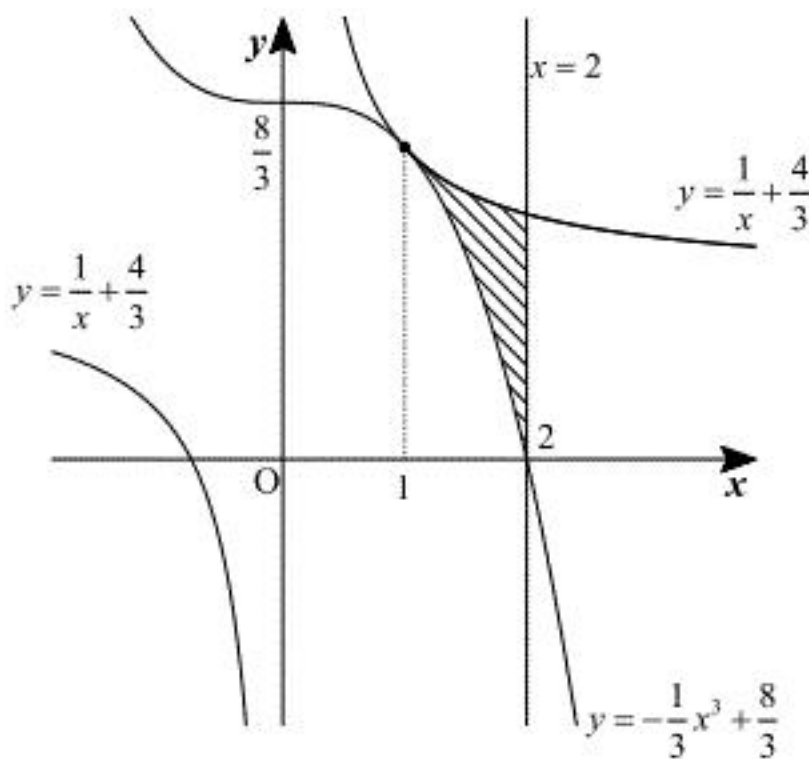
となる。 C_2 と x 軸の交点は

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow x^3 &= 8 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0)\end{aligned}$$

となる。よって直線 L の方程式は

$$x = 2$$

となる。 C_1 と C_2 と L を図示すると下図のようになる。



求める面積は上図の斜線部分である。よって求める面積は

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left\{ \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3} \right) \right\} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3} \right) dx \\ &= \left[\log|x| + \frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x \right]_1^2 \\ &= \left(\log 2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3} \right) - \left(0 + \frac{1}{12} - \frac{4}{3} \right) \\ &= \log 2 - \frac{1}{12}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\log 2 - \frac{1}{12}$