

I

〔解答〕

(1)	(a)
	14
(2)	(b)
	$(t, S) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
(3)	(c)
	(210, 2025)

〔解説〕

(1)

1回の操作で75%の不純物が残るから、元の不純物の98%以上を除去するのに n 回以上の操作が必要であるとすると

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 1 - \frac{98}{100} = \frac{2}{100}$$

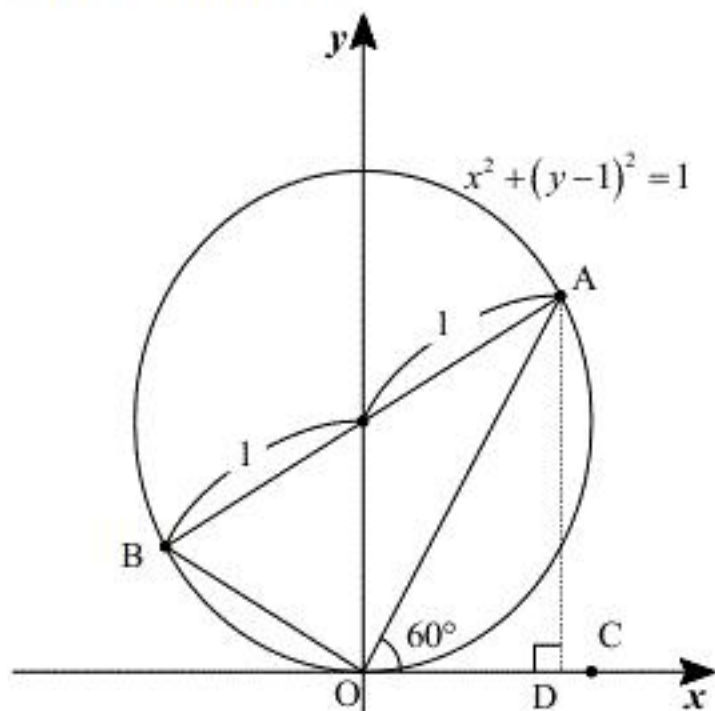
が成立する。両辺に常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{3}{4}\right)^n &\leq \log_{10} \left(\frac{2}{100}\right) \\ \Leftrightarrow n(\log_{10} 3 - \log_{10} 4) &\leq \log_{10} 2 - \log_{10} 10^2 \\ \Leftrightarrow n(\log_{10} 3 - 2\log_{10} 2) &\leq \log_{10} 2 - 2 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\log_{10} 2 - 2}{\log_{10} 3 - 2\log_{10} 2} \left(\because \log_{10} 3 - 2\log_{10} 2 = \log_{10} \frac{3}{4} < 0 \right) \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{0.3010 - 2}{0.4771 - 2 \cdot 0.3010} = 13.6\cdots \end{aligned}$$

となる。よって、元の不純物の98%以上を除去するのに14回以上の操作が必要である。

(2)

円と $\triangle ABO$ を図示すると下図のようになる。



点Aから x 軸に下した垂線の足をDとすると、 $\angle AOC = 60^\circ$ で $\triangle AOD$ は直角三角形より

$$AD = t \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}t$$

となる。したがって点Aの座標は $(t, \sqrt{3}t)$ である。また、円の方程式は

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

であり、点Aはこの円上にあるから

$$\begin{aligned} t^2 + (\sqrt{3}t - 1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow t^2 + 3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 2\sqrt{3}t &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t(2t - \sqrt{3}) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

と導ける。また $\triangle OAD$ において三平方の定理より、OAの長さは $\sqrt{t^2 + (\sqrt{3}t)^2} = 2t$ となる。

ここで、ABは円の直径であるから、円周角の定理より $\angle AOB = 90^\circ$ である。ゆえに、 $\triangle OAB$ に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= 2^2 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + OB^2 &= 4 \\ \therefore OB &= \sqrt{4 - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \quad (\because OB > 0) \end{aligned}$$

となる。よって S は、 $\triangle OAB$ が直角三角形であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。

(3)

a, b, c, d は各位の数であるから

$$1 \leq a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9, \quad 0 \leq d \leq 9$$

となる。 $a > b > c > d$ のとき、重複することなく0から9の中から4つの整数を選び、大きい順に a, b, c, d に当てはめれば $a \neq 0$ となり、 n は一つに決まる。したがって p は

$$p = {}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210$$

となる。 $a > c$ かつ $b > d$ のとき、重複することなく0から9の中から2つの整数を選び、大きい順に a, c に当てはめ、同様に b, d に当てはめれば $a \neq 0$ となり、 n は一つに決まる。したがって q は

$$q = ({}_{10}C_2)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9}{2}\right)^2 = 2025$$

となる。よって、

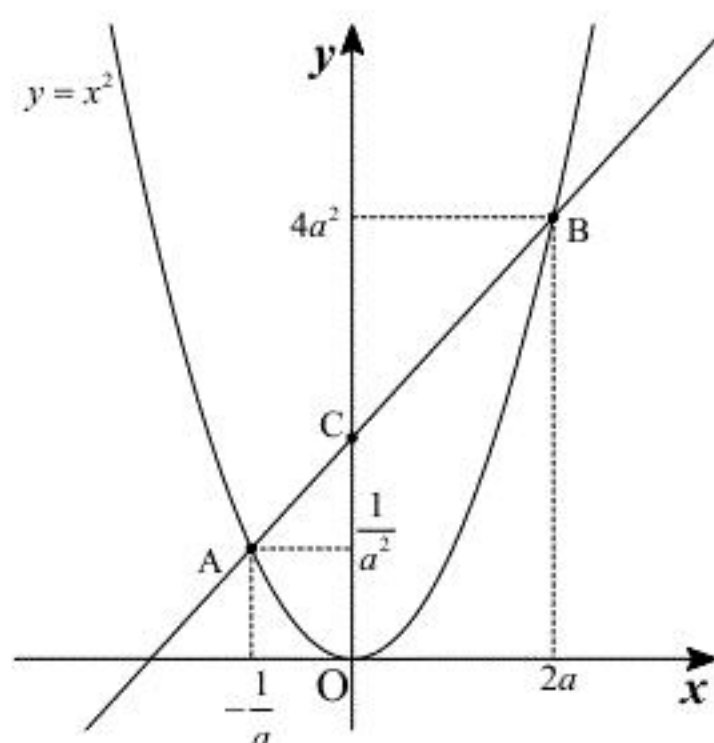
$$(p, q) = (210, 2025)$$

である。

II

(1)

放物線 $y = x^2$ と点 A, B を図示すると下図のようになる。



直線 AB は点 A, B を通るから、傾きは

$$\begin{aligned} \frac{4a^2 - \frac{1}{a^2}}{2a - \left(-\frac{1}{a}\right)} &= \frac{4a^4 - 1}{a(2a^2 + 1)} \\ &= \frac{(2a^2 + 1)(2a^2 - 1)}{a(2a^2 + 1)} \\ &= \frac{2a^2 - 1}{a} \end{aligned}$$

となる。したがって、直線 AB の方程式は、

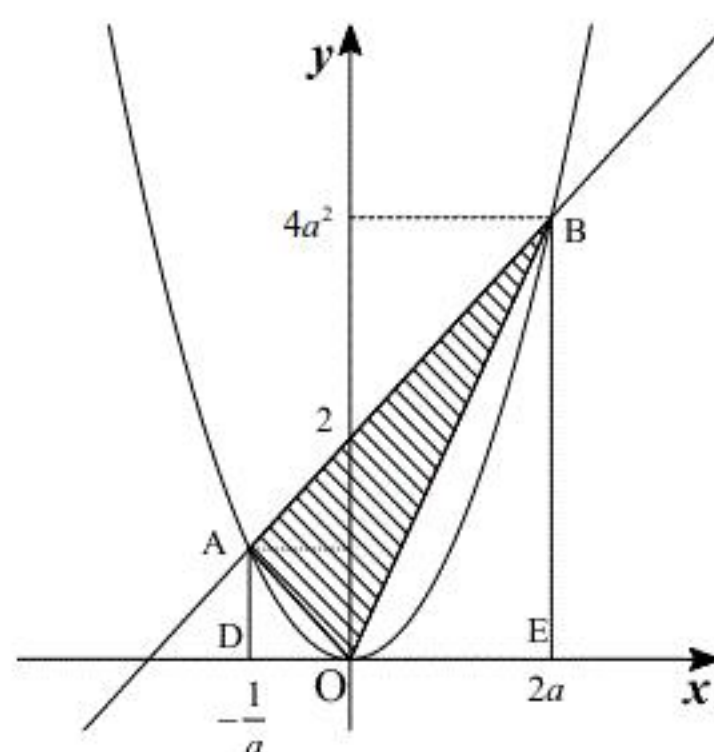
$$\begin{aligned} y - 4a^2 &= \frac{2a^2 - 1}{a}(x - 2a) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2a^2 - 1}{a}x + 2 \end{aligned}$$

である。よって、点 C は直線 AB の y 切片であるから、座標は $(0, 2)$ となる。

(答) $(0, 2)$

(2)

点 A, B から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ点 D, E とする。これらを図示して下図のようになる。



グラフより、求める面積 $S(a)$ は四角形 ABED の面積から $\triangle OAD$ と $\triangle OBE$ の面積を引いたものである。よって $S(a)$ は

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdot \left(2a + \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdot \left(2a + \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(2a + \frac{1}{a} \right) \left(4a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \right) \\ &= 2a + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

となる。ここで、 a は正の実数より $2a > 0, \frac{1}{a} > 0$ であるから相加・相乗平均の大小関係を用いて

$$S(a) = 2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$$

となる。等号成立は

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

の時である。したがって $S(a)$ は、 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる。

(答) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$

Ⅲ

【解答】

(1)	(ア)
	$(2+\sqrt{2}, 3)$
(2)	(イ)
	$\frac{18133}{9}-\left(\frac{4}{9}+\frac{n}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
(3)	(ウ)
	$(27, 3)$

【解説】

(1)

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ を変形して

$$\begin{aligned}\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta &= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\sin2\theta+2\cos^2\theta \\ &= 1+\sin2\theta+(2\cos^2\theta-1)+1 \\ &= \sin2\theta+\cos2\theta+2 \\ &= \sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2\end{aligned}$$

となる。ここで $x=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2$ とおくと、 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$ より

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}\leq2\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3}{4}\pi &\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leq1 \\ &\Leftrightarrow3\leq x\leq2+\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、 x は $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta=\frac{\pi}{8}$ のときに最大値

$$M=2+\sqrt{2}$$

をとる。また、 $2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$ のとき、つまり $\theta=0,\frac{\pi}{4}$ のときに最小値

$$m=3$$

をとる。よって、

$$(M, m)=(2+\sqrt{2}, 3)$$

である。

(2)

$2014+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^{n-1}}$ において

$$S_n=\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^{n-1}}$$

とする。両辺に $\frac{1}{4}$ をかけると

$$\frac{1}{4}S_n=\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{4^4}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}+\frac{n}{4^n}$$

となる。 $S_n-\frac{1}{4}S_n$ を考えると

$$\begin{aligned}S_n-\frac{1}{4}S_n &= \frac{2}{4}+\frac{1}{4^2}(3-2)+\frac{1}{4^3}(4-3)+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\{n-(n-1)\}-\frac{n}{4^n} \\ &= \frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{n}{4^n}\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{n}{4^n}$$

と導ける。右辺第2項は初項 $\frac{1}{4}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ 、項数 $n-1$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}S_n &= \frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{n}{4^n} \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}-\frac{n}{4^n}\end{aligned}$$

となる。よって S_n は

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{3}+\frac{4}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{4^{n-1}} \\ &= \frac{7}{9}-\left(\frac{4}{9}+\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

と求まる。ゆえに求める値は

$$2014+S_n=\frac{18133}{9}-\left(\frac{4}{9}+\frac{n}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

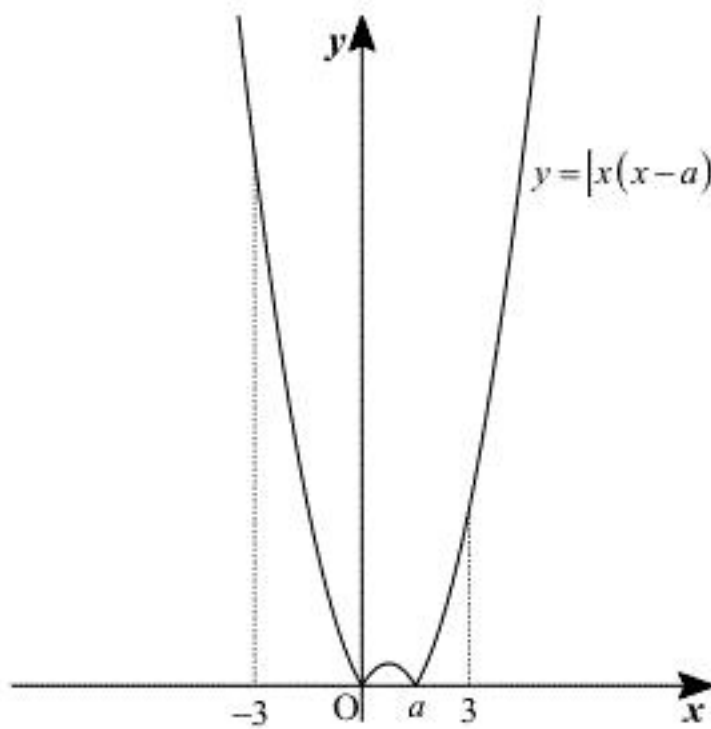
である。

(3)

$0\leq a\leq3$ より、 $y=|x(x-a)|$ とすると、

$$y=\begin{cases}-x(x-a) & (0\leq x\leq a) \\ x(x-a) & (x<0, a<x)\end{cases}$$

となる。したがって、グラフを書くと下図のようになる。



よってグラフより、

$$\begin{aligned}\int_{-3}^3|x(x-a)|dx &= \int_{-3}^0x(x-a)dx+\int_0^a\{-x(x-a)\}dx+\int_a^3x(x-a)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{-3}^0-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^3 \\ &= 0-\left(-9-\frac{9}{2}a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)+0+\left(9-\frac{9}{2}a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3+18\end{aligned}$$

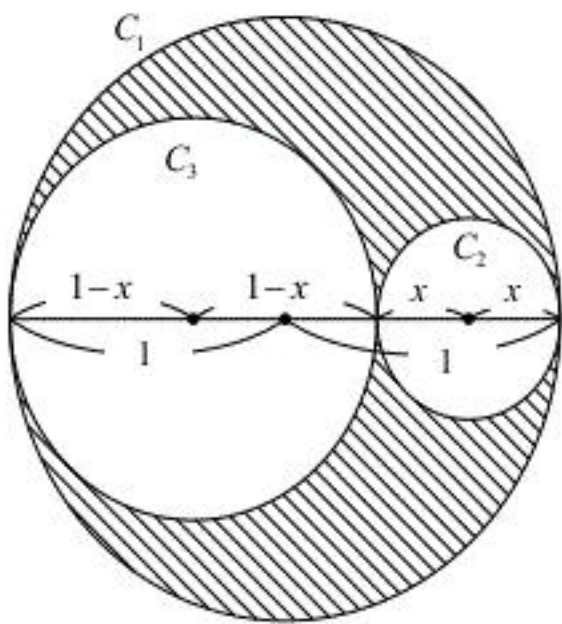
となる。これは、 $a>0$ について単調増加であるから、 $0\leq a\leq3$ より、 $a=3$ のときに最大値
をとりその値 M は

$$M=\frac{1}{3}(3)^3+18=9+18=27$$

である。

IV

求める面積は下図の斜線部分となる。



求める面積を $S(x)$ とすると、 $S(x)$ は C_1 の面積から C_2, C_3 の面積を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} S(x) &= 1^2 \cdot \pi - x^2 \cdot \pi - (1-x)^2 \cdot \pi \\ &= (1-x^2-1+2x-x^2)\pi \\ &= (2x-2x^2)\pi \end{aligned}$$

となる。 $f(x) = -2x^2 + 2x$ とすると平方完成をして

$$f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

となる。したがって、 $0 < x < 1$ であるから $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。よって $S(x)$ の

最大値は

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{2}$

(1)

K_1, K_2 が接するとき、その点における接線が共通であることから、その傾きについて

$$(\sin x)' = (-\cos x + a)'$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

が得られる。ゆえに、接点の x 座標は $\frac{\pi}{4}$ となる。また、 K_1, K_2 が $x = \frac{\pi}{4}$ で接することから

$x = \frac{\pi}{4}$ における y 座標は等しく、

$$\sin \frac{\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} + a$$

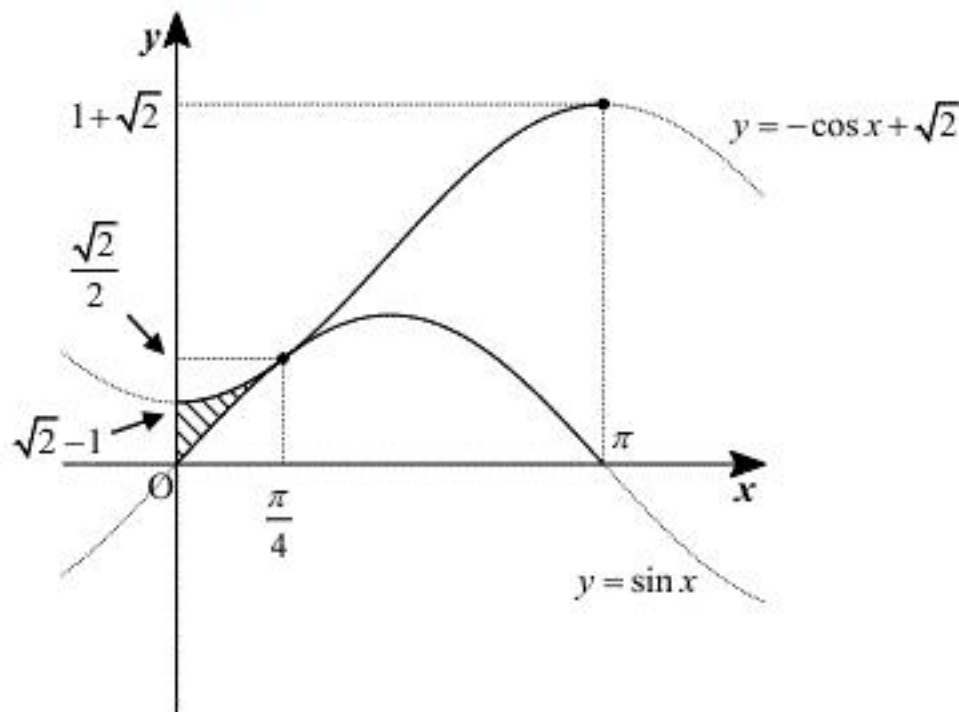
$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}$$

となる。

(答) 接点の座標： $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a の値： $\sqrt{2}$

(2)

$a = \sqrt{2}$ のとき、 K_1, K_2 を図示すると下図のようになる。



求める面積は上図の斜線部分である。よって、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} \{(-\cos x + \sqrt{2}) - \sin x\} dx \\ &= \left[-\sin x + \sqrt{2}x + \cos x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 0 + 1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1$