

I

〔解答〕

(a)

21

(b)

2

(c)

$$\frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} x$$

〔解説〕

(1)

与えられた不等式を変形すると、

$$n^2 - 92n + 2015 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (n - 46)^2 \leq 101$$

が得られる。 $n - 46$ が整数であることを考慮すると、 $(n - 46)^2 \leq 101$ は

$$-10 \leq n - 46 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 36 \leq n \leq 56$$

となる。したがって、 $n^2 - 92n + 2015 \leq 0$ を満たす整数 n は

$$56 - 36 + 1 = 21 \text{ (個)}$$

である。

(2)

底の条件より、

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

である。また、真数条件より、

$$\begin{cases} x^3 + 2 > 0 \\ x(2x + 1) > 0 \end{cases}$$

である。これらを合わせると、 x の条件は、

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

となる。このとき与えられた方程式を解くと、

$$\log_x (x^3 + 2) = \log_x x(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2 = x(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 2$$

が得られる。

(3)

題意より、 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ が成立する。ここで BC の長さを y とおくと、

$$h = y \tan \beta$$

$$h = (x + y) \tan \alpha$$

が成立する。 $\tan \alpha \neq 0, \tan \beta \neq 0$ より、 $y = \frac{h}{\tan \beta}, x + y = \frac{h}{\tan \alpha}$ となるから、 y を消去して整理

すると、

$$x + \frac{h}{\tan \beta} = \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \alpha \tan \beta} h = x$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} x \quad (\because \alpha \neq \beta)$$

が得られる。

Ⅱ

(1)

$y = x^3 + 6x^2$ を x について微分すると

$$y' = 3x^2 + 12x$$

となる。接点の座標を実数 t を用いて $(t, t^3 + 6t^2)$ と表すと、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 + 12t)(x - t) + t^3 + 6t^2 \\ &= (3t^2 + 12t)x - 2t^3 - 6t^2 \end{aligned}$$

となる。これが点 $(2, a)$ を通るから、

$$a = -2t^3 + 24t$$

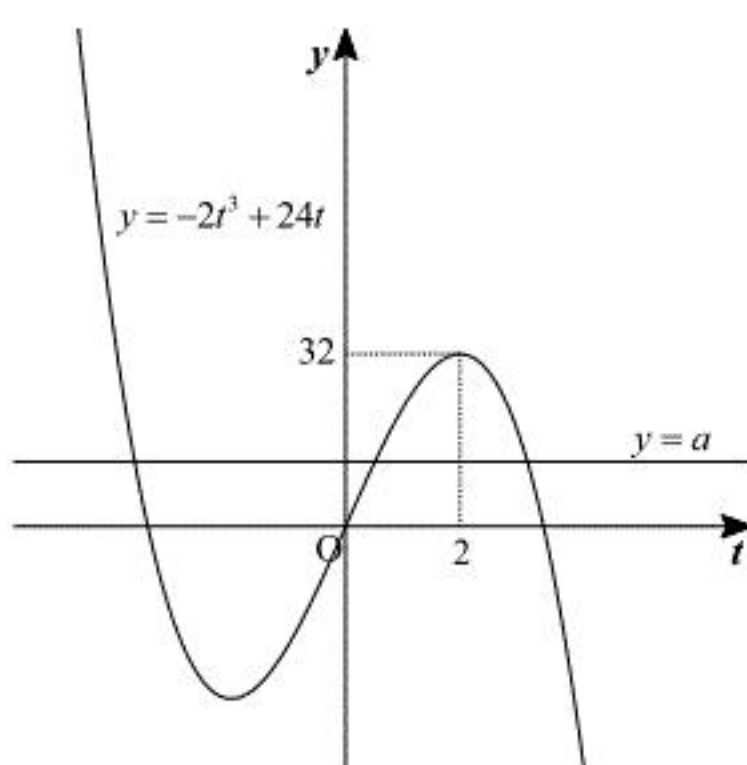
が得られる。3次関数では、接点の個数と接線の本数は一致するから、この方程式を満たす t の個数が接線の本数 L となる。 $f(t) = -2t^3 + 24t$ とおくと、方程式 $a = -2t^3 + 24t$ を満たす t の個数は $y = a$ と $y = f(t)$ の交点の個数と等しい。 $f(t) = -2t^3 + 24t$ を t について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -6t^2 + 24 \\ &= -6(t-2)(t+2) \end{aligned}$$

となり、増減表は以下のようになる。

t	...	-2	...	2	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	極小	↘	極大	↗

したがって、 $y = f(t)$ と $y = a$ を図示すると以下のようになる。



したがって、

$0 < a < 32$ のとき $L = 3$

$a = 32$ のとき $L = 2$

$a > 32$ のとき $L = 1$

となる。

(答) $0 < a < 32$ のとき $L = 3$

$a = 32$ のとき $L = 2$

$a > 32$ のとき $L = 1$

(2)

(1)の結果より $L = 2$ のとき $a = 32$ である。このとき、接点の x 座標は

$$-2t^3 + 24t = 32$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2(t+4) = 0$$

$$\therefore t = -4, 2$$

であるから、小さい方は $x = -4$ である。このときの接線の方程式は、

$$y = 32$$

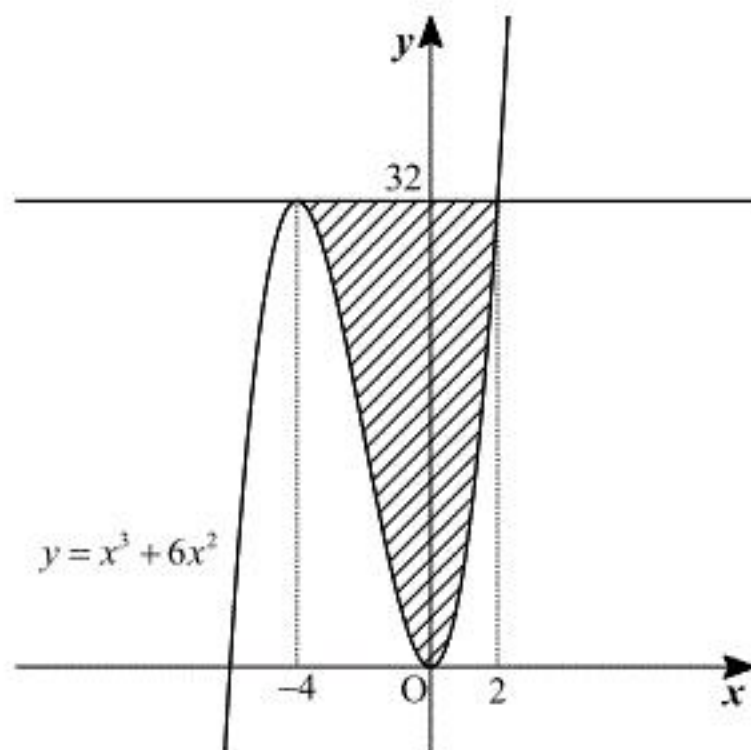
となる。これと $y = x^3 + 6x^2$ の交点の座標は、

$$x^3 + 6x^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4, 2$$

である。したがって、求める面積を図示すると以下のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-4}^2 \{32 - (x^3 + 6x^2)\} dx &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 32x \right]_{-4}^2 \\ &= 108 \end{aligned}$$

となる。

(答) 108

Ⅲ

〔解答〕

(ア)

$$\frac{m}{2m+1}$$

(イ)

34

(ウ)

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

〔解説〕

(1)

$\frac{1}{(2k)^2-1}$ を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2k)^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)\end{aligned}$$

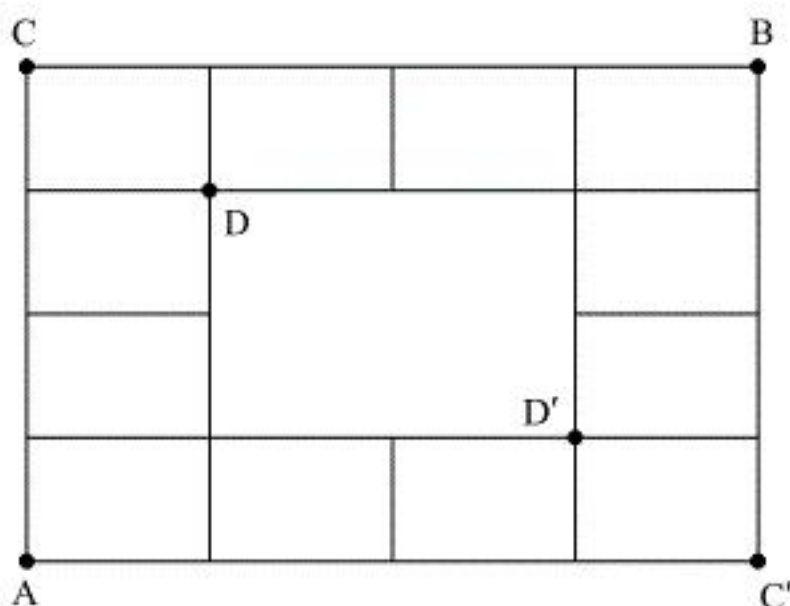
が得られる。したがって、求める値は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^2-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2m+1} \right) \\ &= \frac{m}{2m+1}\end{aligned}$$

となる。

(2)

図のように、C, C', D, D' 地点を定める。



C, C' 地点を通る最短経路の場合の数はそれぞれ1通りである。また、D, D' 地点を通る最短経路の場合の数はそれぞれ

$$\frac{4!}{1!3!} \cdot \frac{4!}{1!3!} = 16 \text{ (通り)}$$

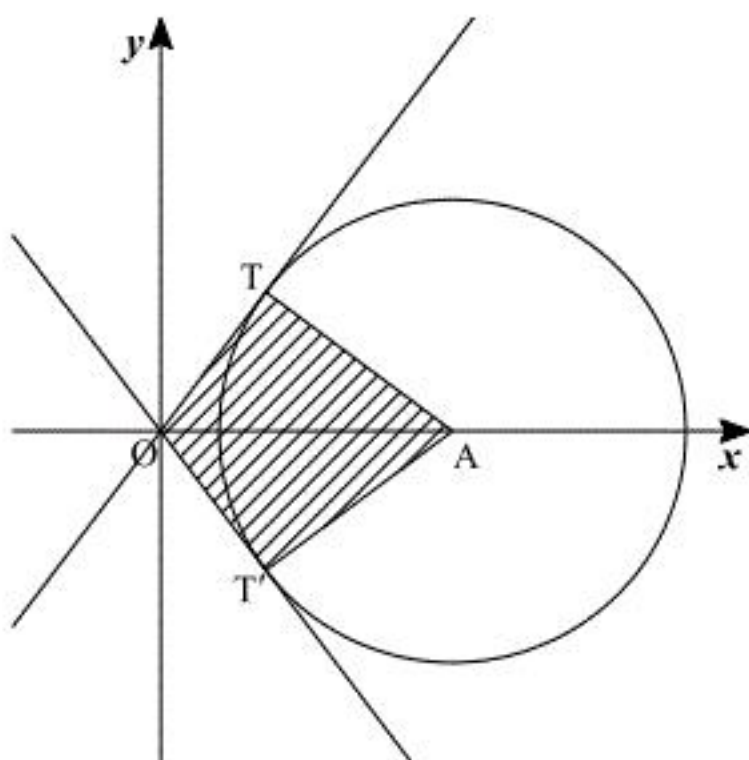
である。したがって、求める場合の数は

$$1 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 34 \text{ (通り)}$$

である。

(3)

接点をT, T'として、求める面積を図示すると以下ようになる。



四角形OT'ATの面積は、三角形OTAと三角形OT'Aの面積の和であり、対称性より2つの三角形の面積の和は等しい。ここで、 $OT \perp AT$ であるから△OATについて三平方の定理より

$$\begin{aligned}OT^2 + AT^2 &= OA^2 \\ \Leftrightarrow OT^2 &= 1 - r^2 \\ \therefore OT &= \sqrt{1 - r^2}\end{aligned}$$

となる。よって、四角形OT'ATの面積をSとすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} r \sqrt{1 - r^2} \cdot 2 \\ &= r \sqrt{1 - r^2} \\ &= \sqrt{r^2 - r^4} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} - \left(r^2 - \frac{1}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $0 < r < 1$ でSが最大値をとるのは $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。したがって、Mの値は

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

となる。以上より、 $(M, r) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

IV

点 D は辺 AB の中点であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

である。点 E は辺 BC を 2:1 に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

である。点 F は $\triangle OCA$ の重心より

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

となる。ここで、点 G は $\triangle DEF$ の重心より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{5}{18}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{18}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{18}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

V

$y = \log x$ を x について微分すると,

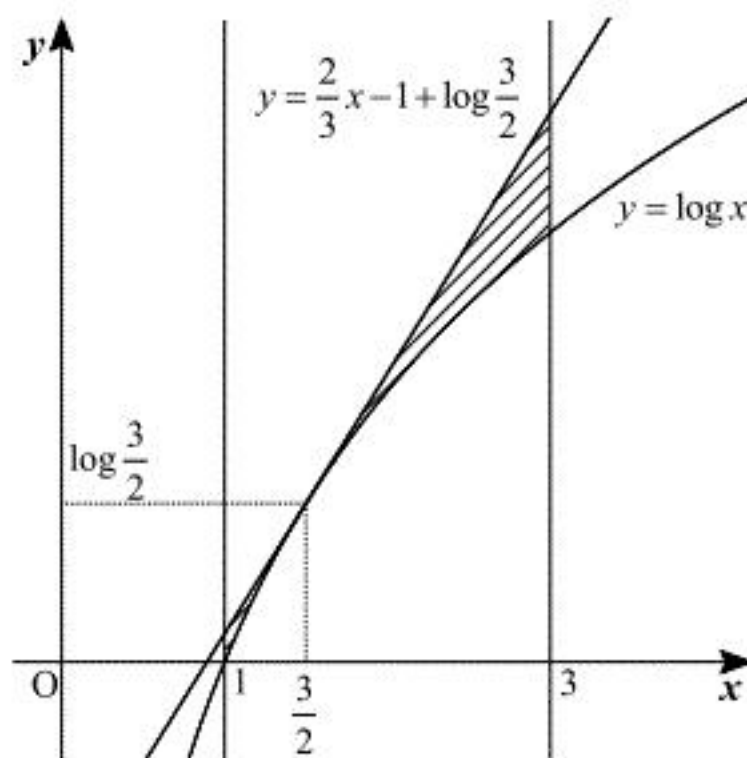
$$y' = \frac{1}{x}$$

となる。したがって、点 $\left(\frac{3}{2}, \log \frac{3}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \log \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 1 + \log \frac{3}{2}$$

となる。ここで、求める面積を図示すると以下のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left\{ \left(\frac{2}{3}x - 1 + \log \frac{3}{2} \right) - (\log x) \right\} dx &= \left[\frac{1}{3}x^2 + \left(\log \frac{3}{2} - 1 \right)x - x \log x + x \right]_1^3 \\ &= \frac{8}{3} - \log 3 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3} - \log 3 - 2 \log 2$