

I

【解答】

(a)	(b)	(c)
3	$-\frac{1}{7} < x < \frac{17}{3}$	$\left(3, \frac{5}{4}\right)$

【解説】

(1)

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow (k-1)(k-3) = 0 \Leftrightarrow k = 1, 3$$

より、 $k = 1, 3$ のとき問題の方程式は1次式であるから、解を1つだけ持つ。 $k \neq 1, 3$ のとき、問題の方程式は2次式で、この2次方程式の判別式 D が正であるような場合を求めると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (-2)^2 - 1 \cdot (k^2 - 4k + 3) &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 4k - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (k-2)^2 &< 5 \end{aligned}$$

となる。 k が整数より、 k は

$$\begin{aligned} k-2 &= -2, -1, 0, 1, 2 \\ \Leftrightarrow k &= 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

の5個である。 $k \neq 1, 3$ であるから、条件を満たす k は $k = 0, 2, 4$ の3個である。

(2)

まず、対数の真数条件より

$$\begin{cases} 7x+1 > 0 \\ 2x+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}$$

である。この条件のもとで変形していくと

$$\begin{aligned} \log_4(7x+1) &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2x+9) \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2(7x+1)}{\log_2 4} &< \frac{1}{2} \{1 + \log_2(2x+9)\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(7x+1) &< \frac{1}{2} \log_2 2(2x+9) \\ \Leftrightarrow \log_2(7x+1) &< \log_2 2(2x+9) \end{aligned}$$

となる。底は1より大きいから、

$$\begin{aligned} 7x+1 &< 4x+18 \\ \Leftrightarrow x &< \frac{17}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、その共通部分をとると

$$-\frac{1}{7} < x < \frac{17}{3}$$

となる。

(3)

$t = \sin \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $0 \leq t \leq 1$ である。また、

$$\begin{aligned} 4\sin^3 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta + 1 &= 4\sin^3 \theta + (1 - \sin^2 \theta) - 2\sin \theta + 1 \\ &= 4t^3 - t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

と変形できる。この最後の式を $f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(t) &= 12t^2 - 2t - 2 \\ &= 2(6t^2 - t - 1) \\ &= 2(3t+1)(2t-1) \end{aligned}$$

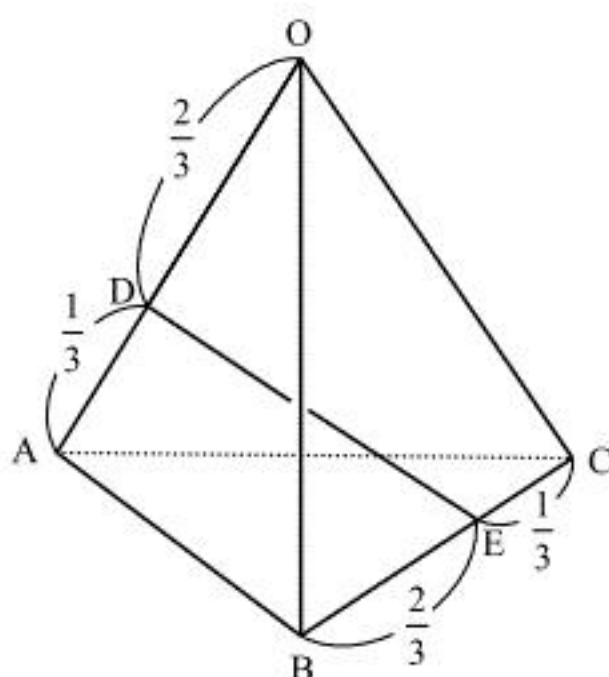
となる。よって、 $0 \leq t \leq 1$ であることに注意すると、 $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	(極小)	$\nearrow$	

また、

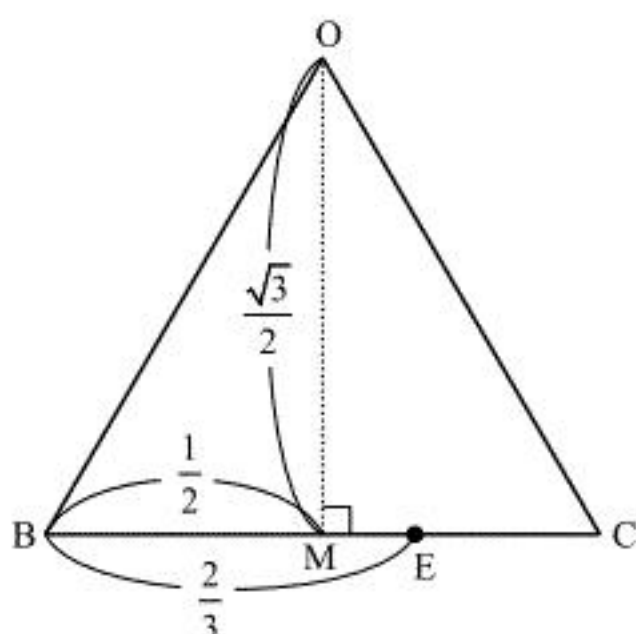
$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= 3 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となるから、 $(M, m) = \left(3, \frac{5}{4}\right)$ である。



正四面体 $OABC$ は上の図のようになっている。辺 BC の中点を M とおくと、

$BM = \frac{1}{2}$, $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。 $\triangle OBC$ は次の図のようになっている。



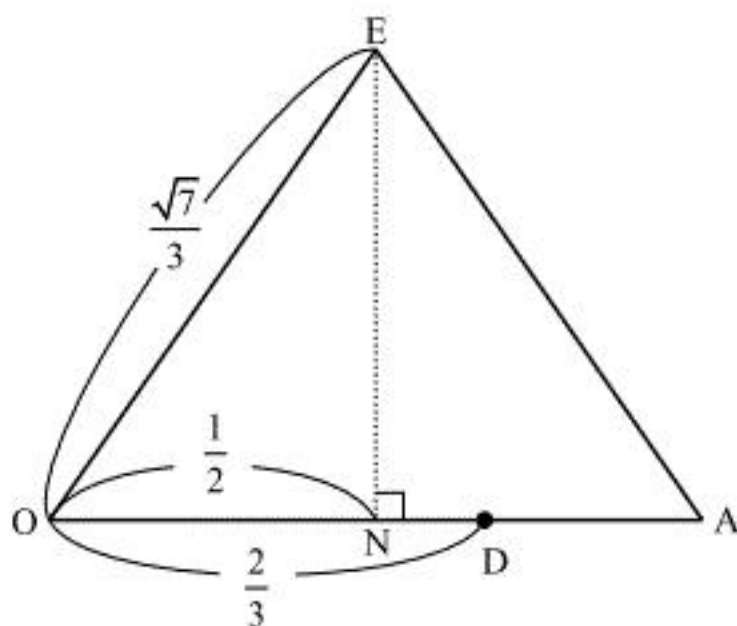
よって

$$ME = BE - BM = \frac{1}{6}$$

となり、 $\triangle OME$ に三平方の定理を適用すると

$$OE = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

となる。対称性より、 $AE = \frac{\sqrt{7}}{3}$ である。よって、辺 OA の中点を N とすると、 $\triangle OAE$ は次の図のようになっている。



よって、 $\triangle OEN$ に三平方の定理を適用すると

$$EN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{6}$$

となり、また先ほどと同様に $ND = \frac{1}{6}$ であるから、 $\triangle EDN$ に三平方の定理を適用すると

$$DE = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{19}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

となる。

(答) $DE = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Ⅲ

〔解答〕

(ア)	(イ)	(ウ)
$\frac{67}{73}$	266	$\frac{11}{27}$

〔解説〕

(1)

5561 と 6059 にユークリッドの互除法を用いると

$$6059 = 1 \cdot 5561 + 498$$

$$5561 = 11 \cdot 498 + 83$$

$$498 = 6 \cdot 83$$

となる。よって、5561 と 6059 の最大公約数は 83 である。したがって

$$\frac{5561}{6059} = \frac{83 \cdot 67}{83 \cdot 73} = \frac{67}{73}$$

と約分ができる。

(2)

漸化式より

$$a_2 = (2+1)(2-1) = 3$$

$$a_3 = (3+2)(3-2) = 5$$

$$a_4 = (5+3)(5-3) = 16$$

$$a_5 = (16+4)(16-4) = 240$$

となる。よって

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 2 + 3 + 5 + 16 + 240 = 266$$

となる。

(3)

サイコロのそれぞれの目が出る確率は同様に確からしいとする。サイコロを投げたとき、点 P が正の方向に動く、負の方向に動く、原点 O に戻る確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。サイコロを 3 回投げたときに点 P が原点 O にいる確率を、サイコロの 5 または 6 の目が出るタイミングによって場合分けして求める。

[1] 3 回目に 5 または 6 が出るとき

このとき、1, 2 回目に出た目が何であれ、3 回サイコロを投げた後に点 P は必ず原点 O に存在する。よって、確率は $\frac{1}{3}$ となる。

[2] 2 回目に 5 または 6 の目が出て、3 回目に 1, 2, 3, 4 の目が出るとき

このとき、点 P は 2 回サイコロを振った後に原点 O に戻り、3 回目で正もしくは負の方向に 1 だけ移動するため、サイコロを 3 回投げた後に点 P が原点 O にいることはない。よって不適である。

[3] 1 回目に 5 または 6 の目が出て、2, 3 回目に 1, 2, 3, 4 の目が出るとき

このとき、点 P は 1 回サイコロを振った後に原点 O に存在する。サイコロを 3 回投げた後に点 P が原点 O にいるためには 2, 3 回目で正、負の方向にそれぞれ 1 回ずつ移動すればよく、求める確率は

$$\frac{1}{3} \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

となる。

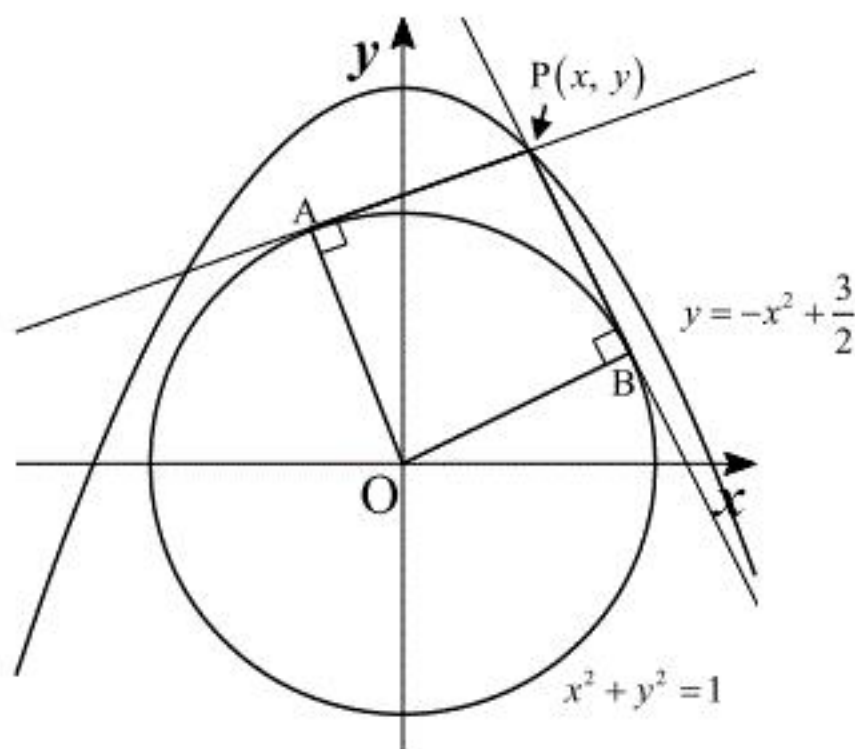
[4] 3 回目とも 1, 2, 3, 4 の目が出るとき

サイコロを 3 回投げた後に点 P が原点 O にいるためには正の方向と負の方向にそれぞれ同じ回数だけ移動する必要があるが、3 は奇数であるためそれは不可能である。よって不適である。

以上[1], [2], [3], [4]より、サイコロを 3 回投げたときに点 P が原点 O にいる確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$$

である。



四角形 $PAOB$ の面積を S とおくと

$$S = \triangle OAP + \triangle OBP$$

である。また、 $P(x, y)$ のとき $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり、 OA, OB は円の半径であるから、 $OA = OB = 1$ である。よって、 $AP \perp OA$ かつ $BP \perp OB$ より、三平方の定理を用いると

$$AP = BP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

となる。したがって、 $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ であることから、

$$S = \triangle OAP + \triangle OBP = 2 \triangle OAP$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot PA$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

となる。 P は放物線 $y = -x^2 + \frac{3}{2}$ 上の点であるから

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= x^2 + \left(-x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2 + \frac{5}{4} \\ &= (x^2 - 1)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。また、 $y \geq 0$ より

$$-x^2 + \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{3}{2}$$

である。よって、 $x^2 = 1$ 、すなわち $P\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right)$ のとき最小値 $m = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ をとり、 $x^2 = 0$ 、すなわ

ち $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ のとき $M = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad P\left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ のとき } M = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad P\left(\pm 1, \frac{1}{2}\right) \text{ のとき } m = \frac{1}{2}$$

V

交点の x 座標を求めると

$$e^x - 1 = e^{-x} + \frac{1}{2}$$

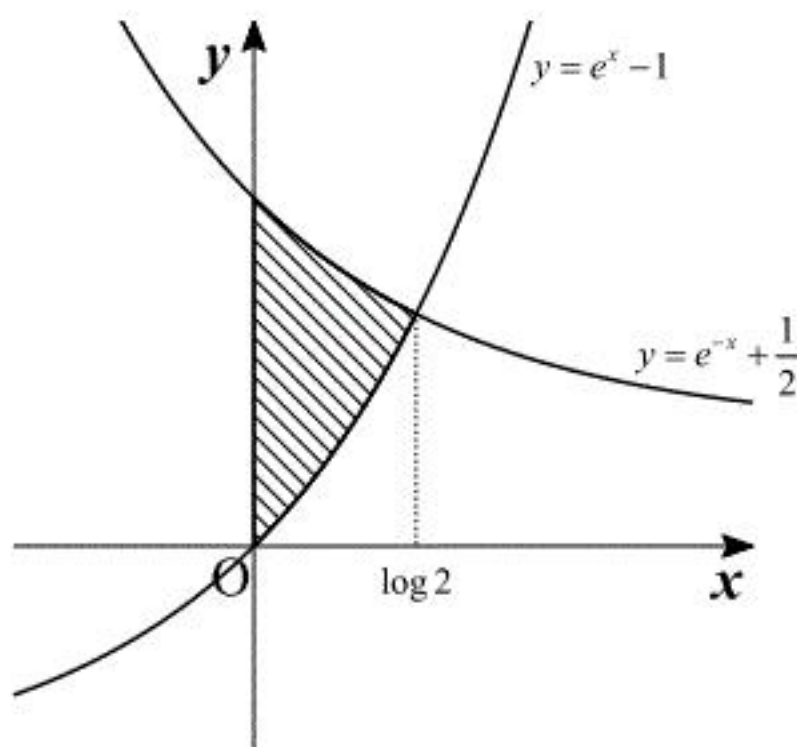
$$\Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 3e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2e^x + 1)(e^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\therefore x = \log 2$$

となる。



問題の面積は上の図の斜線部分の面積である。したがって、面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \left\{ \left(e^{-x} + \frac{1}{2} \right) - (e^x - 1) \right\} dx &= \left[-e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}x \right]_0^{\log 2} \\ &= \left(-2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\log 2 \right) - (-1 - 1 + 0) \\ &= \frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}$