

I

〔解答〕

(a)

$$\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

(b)

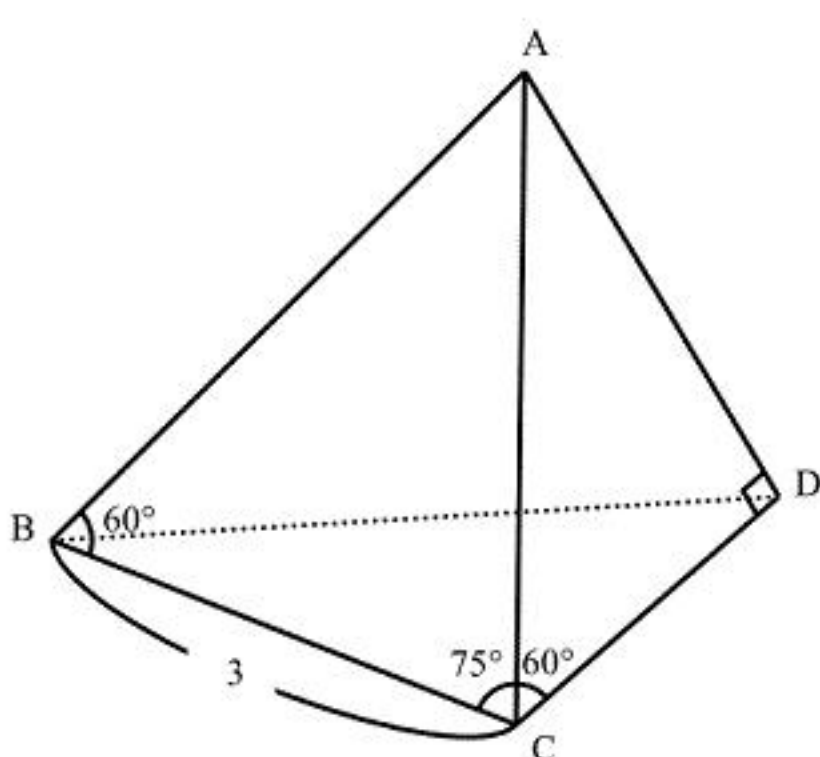
$$\frac{4}{9}$$

(c)

$$\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

〔解説〕

(1)



△ABC について、

$$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 45^\circ$$

である。ここで正弦定理を適用すると、

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$
$$AC = \frac{BC \cdot \sin \angle ABC}{\sin \angle BAC} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

となる。△ACD について、

$$\angle ADC = 90^\circ, \angle ACD = 60^\circ, \angle CAD = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

であるから、

$$AD = AC \sin \angle ACD = \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

となる。

(2)

12 個の玉が入った袋から 4 個の玉を同時に取り出すときの取り出し方は ${}_{12}C_4 (= 495)$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。このうち赤玉が 2 個以上かつ青玉が 1 個以上であるような色の選び方は、

赤 2 個青 1 個白 1 個、赤 2 個青 2 個白 0 個、赤 3 個青 1 個白 0 個

の 3 通りである。赤 2 個青 1 個白 1 個である玉の取り出し方は

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 = 120 \text{ 通り}$$

である。赤 2 個青 2 個白 0 個である玉の取り出し方は

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_2 = 60 \text{ 通り}$$

である。赤 3 個青 1 個白 0 個である玉の取り出し方は

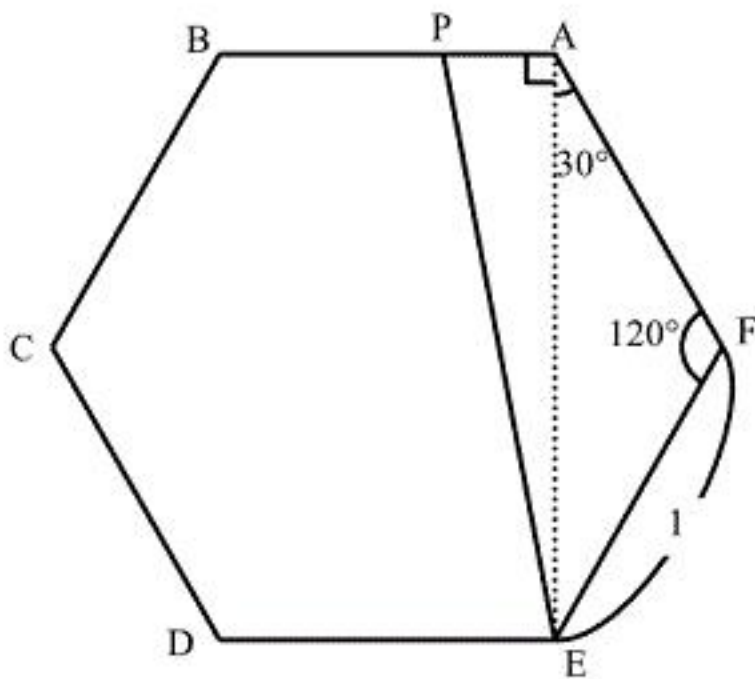
$${}_5C_3 \cdot {}_4C_1 = 40 \text{ 通り}$$

である。以上から求める確率は

$$\frac{120 + 60 + 40}{{}_{12}C_4} = \frac{220}{495} = \frac{4}{9}$$

となる。

(3)



正 6 角形の 1 つの内角は 120° であるから、

$$\angle FAE = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ, \angle PAE = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

とわかる。また、△AEF において正弦定理より、

$$\frac{AE}{\sin \angle AFE} = \frac{FE}{\sin \angle FAE}$$

となるから、線分 AE の長さは

$$AE = FE \cdot \frac{\sin \angle AFE}{\sin \angle FAE} = 1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

となる。点 P は辺 AB を 1:2 に内分する点であるから、 $AP = \frac{1}{3}$ となるため、三平方の定理より

$$EP = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

である。

点Hは平面OAB上にあるから、 $\overrightarrow{OH}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= s(1, 1, 1) + t(2, 1, 2) \\ &= (s+2t, s+t, s+2t) \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、線分CHと平面OABは垂直であるから、 $CH \perp OA, CH \perp OB$ すなわち $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ が成り立つ。内積を計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= (s+2t-3, s+t+1, s+2t+1) \cdot (1, 1, 1) \\ &= 3s+5t-1 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} &= (s+2t-3, s+t+1, s+2t+1) \cdot (2, 1, 2) \\ &= 5s+9t-3\end{aligned}$$

である。連立方程式

$$\begin{cases} 3s+5t-1=0 \\ 5s+9t-3=0 \end{cases}$$

を解くと $(s, t) = (-3, 2)$ となる。これを①に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= (-3+2 \cdot 2, -3+2, -3+2 \cdot 2) \\ &= (1, -1, 1)\end{aligned}$$

が得られる。このとき、 $\overrightarrow{CH} \neq \vec{0}$ をみたすから、求める座標は $H(1, -1, 1)$ である。

(答) $(1, -1, 1)$

Ⅲ

〔解答〕

(ア)

71

(イ)

$\left(\frac{17}{8}, 1\right)$

(ウ)

1008

〔解説〕

(1)

5^n が十進法で 50 桁になるのは,

$$10^{49} \leq 5^n < 10^{50}$$

が成り立つときである。この不等式について常用対数をとると,

$$49 \leq n \log_{10} 5 < 50$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{\log_{10} 5} \leq n < \frac{50}{\log_{10} 5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \log_{10} 5 &= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - \log_{10} 2 \end{aligned}$$

である。これに $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ を適用すると,

$$0.698 < \log_{10} 5 < 0.699$$

であるので, ①の最左辺, 最右辺について,

$$\frac{49}{0.699} < \frac{49}{\log_{10} 5} < \frac{49}{0.698} \Leftrightarrow 70.1\cdots < \frac{49}{\log_{10} 5} < 70.2\cdots$$

$$\frac{50}{0.699} < \frac{50}{\log_{10} 5} < \frac{50}{0.698} \Leftrightarrow 71.5\cdots < \frac{50}{\log_{10} 5} < 71.6\cdots$$

となる。従って, 求める整数 n は $n = 71$ である。

(2)

$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 1) - x^2 + x + 1 \\ &= -2x^2 + x + 2 \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} \end{aligned}$$

である。この区間での最小値は $x = 1$ のとき $f(1) = 1$, 最大値は $x = \frac{1}{4}$ のとき $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8}$ である。

また $1 \leq x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1) - x^2 + x + 1 \\ &= x \end{aligned}$$

である。この区間での最小値は $x = 1$ のとき $f(1) = 1$, 最大値は $x = 2$ のとき $f(2) = 2$ である。

以上から, $M = \frac{17}{8}$, $m = 1$ とわかる。

(3)

自然数 k を用いて $\sqrt{n^2 + 2017} = k$ とおく。両辺を 2 乗して変形すると

$$\begin{aligned} n^2 + 2017 &= k^2 \\ \Leftrightarrow k^2 - n^2 &= 2017 \\ \Leftrightarrow (k+n)(k-n) &= 2017 \end{aligned}$$

となる。このとき, n, k はともに自然数であることと $n < k$ であることより, $k - n, k + n$ はいずれも自然数となる。よって, 2017 が素数であることと $k + n \geq 1 + 1 = 2$ であることから, $k + n = 2017$, $k - n = 1$ としてよい。これを解くと

$$(n, k) = (1008, 1009)$$

となる。

IV

(1)

$f(x)$ が極大値と極小値をそれぞれ一つずつ取るのは、 $f'(x)=0$ となるような実数 x が2つ存在するときである。 $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=3x^2+6ax+3$$

である。ここで、2次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると、求める条件は

$$D>0$$

$$\Leftrightarrow (6a)^2-4\cdot 3\cdot 3>0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-1)>0$$

$$\therefore a<-1, 1<a$$

となる。

(答) $a<-1, 1<a$

(2)

$x=p, q$ は方程式 $f'(x)=0$ の2つの実数解である。このとき、解と係数の関係から

$$\begin{cases} p+q=-\frac{6a}{3}=-2a \\ pq=\frac{3}{3}=1 \end{cases}$$

である。よって、点Aと点Bの中点の x 座標は

$$\frac{p+q}{2}=-a$$

であり、 y 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{f(p)+f(q)}{2} &= \frac{(p^3+3ap^2+3p)+(q^3+3aq^2+3q)}{2} \\ &= \frac{(p^3+q^3)+3a(p^2+q^2)+3(p+q)}{2} \\ &= \frac{\{(p+q)^3-3pq(p+q)\}+3a\{(p+q)^2-2pq\}+3(p+q)}{2} \\ &= \frac{(-8a^3+6a)+3a(4a^2-2)-6a}{2} \\ &= 2a^3-3a \end{aligned}$$

である。この中点が直線 $y=-x$ 上にあるのは、

$$2a^3-3a=-(-a)$$

が成り立つときである。これを解くと、

$$2a^3-4a=0$$

$$\Leftrightarrow 2a(a^2-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{2} \quad (\because a<-1, 1<a)$$

となる。

(答) $a=\pm\sqrt{2}$

(1)

関数 $f(x)$ の分母と分子を $x^2 (\neq 0)$ で割ると

$$f(x) = \frac{2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

となる。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

となる。

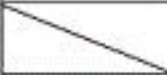
$$(答) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

(2)

関数 $f(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+4)(x^2+1) - (2x^2+4x+5) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(2x-1)(x+2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、(1)と合わせて、増減表は以下のようになる。

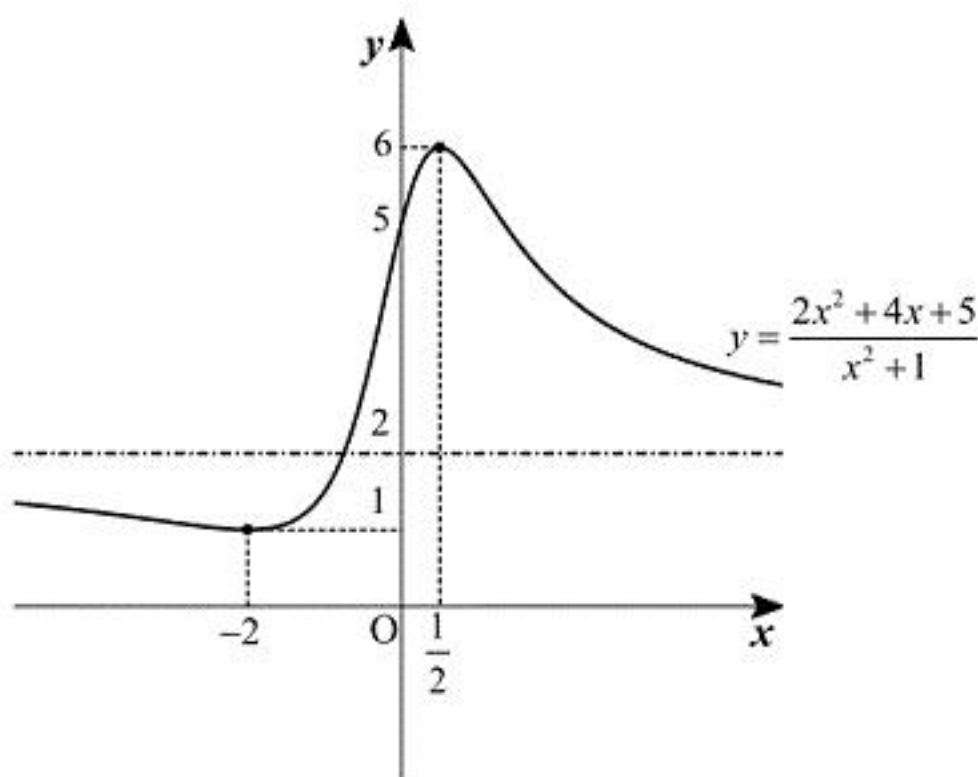
x	$(-\infty)$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(∞)
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	(2)	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	(2)

ここで、極小値、極大値はそれぞれ

$$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5}{(-2)^2 + 1} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 5}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = 6$$

となる。以上からグラフの概形を描くと次のようになる。



(答) 前図(ただし、漸近線 $y = 2$ を持つ)

(3)

(1), (2)の結果から、この関数は $x = -2$ のとき最小値1をとり、 $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値6をとることがわかる。

$$(答) \text{最大値: } 6 \left(x = \frac{1}{2} \right), \text{最小値: } 1 (x = -2)$$