

I

〔解答〕

(a)	$(2, 0)$
-----	----------

(b)	$2 \pm \sqrt{2}$
-----	------------------

(c)	-1010
-----	---------

〔解説〕

(1)

まず、真数条件より、

$$1-x > 0 \text{ かつ } x+2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

となり、これが定義域である。与式は、

$$\begin{aligned} y &= \log_2(1-x) - 2 \cdot \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= \log_2(1-x)(x+2)^2 \\ &= \log_2(-x^3-3x^2+4) \end{aligned}$$

と変形でき、底が1より大きいことから $-x^3-3x^2+4$ の最大値を考えればよい。ここで、 $f(x) = -x^3-3x^2+4$ とおくと、

$$f'(x) = -3x^2-6x = -3x(x+2)$$

となるから、 $-2 < x < 1$ における $f(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	(-2)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

以上より、 $f(x)$ は $x=0$ で最大値

$$f(0) = -0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

をとり、求める最大値 M は、

$$M = \log_2 4 = 2$$

である。

(2)

$x=-2$ を解に持つから、方程式に代入して、

$$\begin{aligned} (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 4 &= 0 \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

が得られる。よって、元の方程式を解くと、

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 6x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x^2-4x+2) &= 0 \\ \therefore x &= -2, 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって、他の2つの解は $x = 2 \pm \sqrt{2}$ である。

(3)

式を展開すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2018} (-1)^{k+1} k &= \sum_{k=1}^{2018} (-1)^{k+1} k - 1 \\ &= 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2017 - 2018 - 1 \\ &= (1-2) + (3-4) + \cdots + (2017-2018) - 1 \\ &= (-1) + (-1) + \cdots + (-1) - 1 \end{aligned}$$

となる。上式は -1 が $\frac{1}{2} \cdot 2018 + 1 = 1010$ 個並んでいるので、

$$\sum_{k=2}^{2018} (-1)^{k+1} k = -1010$$

である。

II

(1)

絶対値記号の中の正負で場合分けをして考える。

[1] $2x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ のとき

不等式は,

$$-(2x-2) < x^2+2x+2$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) > 0$$

$$\therefore x < -4, 0 < x < 1 \quad (\because x < 1)$$

となる。

[2] $2x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ のとき

不等式は,

$$2x-2 < x^2+2x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2+4 > 0$$

$$\therefore x \geq 1 \quad (\because x \geq 1)$$

となる。

以上[1],[2]より不等式を満たす実数 x の範囲は,

$$x < -4, 0 < x$$

である。

(答) $x < -4, 0 < x$

(2)

実数 x について, $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0$ であるから, (1)の結果より

$$x < -4, 0 < x \text{ のとき, } |2x-2| < x^2+2x+2 \Leftrightarrow \left| \frac{2x-2}{x^2+2x+2} \right| < 1$$

$$-4 \leq x \leq 0 \text{ のとき, } |2x-2| \geq x^2+2x+2 \Leftrightarrow \left| \frac{2x-2}{x^2+2x+2} \right| \geq 1$$

となる。以下, $\frac{2n-2}{n^2+2n+2}$ が整数となるような整数 n について, $n < -4, 0 < n$ および $-4 \leq n \leq$

0 で場合分けをして考える。

[1] $n < -4, 0 < n$ のとき

$\left| \frac{2n-2}{n^2+2n+2} \right| < 1$ となるから, $\frac{2n-2}{n^2+2n+2} = 0$ となる場合のみ考えれば良く, $n=1$ が得られる。

[2] $-4 \leq n \leq 0$ のとき

整数 n の各値を代入すると, 以下の表のようになる。

n	-4	-3	-2	-1	0
$\frac{2n-2}{n^2+2n+2}$	-1	$-\frac{8}{5}$	-3	-4	-1

従って, $n = -4, -2, -1, 0$ が得られる。

以上[1],[2]より, 求める n の値は $n = -4, -2, -1, 0, 1$ となる。

(答) $n = -4, -2, -1, 0, 1$

Ⅲ

〔解答〕

$$(ア) \quad \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(イ) \quad 78$$

$$(ウ) \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4} \right)$$

〔解説〕

(1)

条件より、

$$A+B+C=180^\circ \Leftrightarrow A+B=135^\circ$$

であるから、加法定理より、

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow \cos 135^\circ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow \sin A \sin B &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

となる。以上より、加法定理から、

$$\begin{aligned} \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

と求められる。

(2)

一の位が1である5桁の数は、全部で

$$4! = 24 \text{ (個)}$$

ある。また、十の位が2である5桁の数は、全部で

$$4! = 24 \text{ (個)}$$

ある。さらに、一の位が1で、かつ十の位が2である5桁の数は、全部で

$$3! = 6 \text{ (個)}$$

ある。以上より、「一の位が1」、「十の位が2」を少なくともどちらか一方を満たしている5桁の数は、全部で、

$$24 + 24 - 6 = 42 \text{ (個)}$$

ある。ここで、作られうる5桁の数は、全部で、

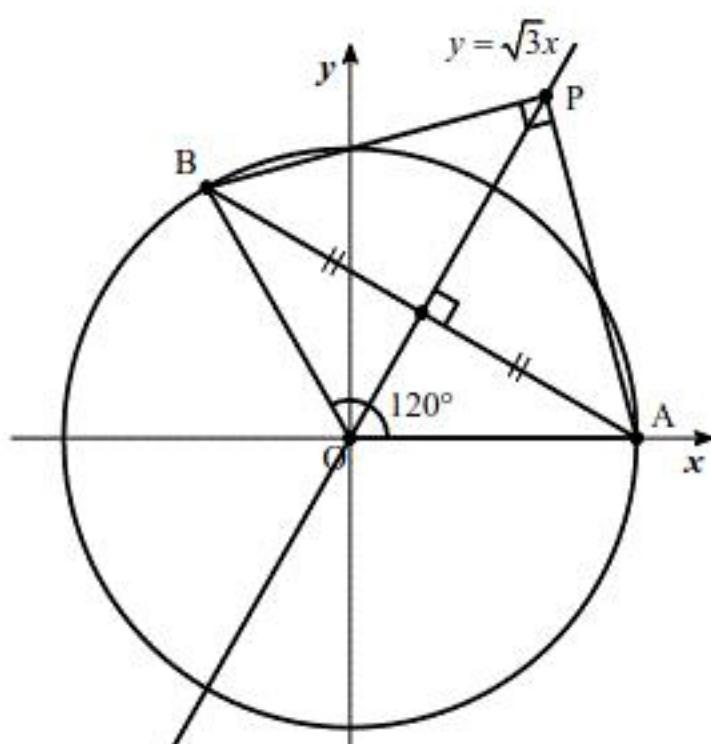
$$5! = 120 \text{ (個)}$$

あるから、一の位が1でなく、かつ十の位が2でもない5桁の数は、全部で、

$$120 - 42 = 78 \text{ (個)}$$

ある。

(3)



$AP = BP$ となるのは、点Pが線分ABの垂直二等分線上にあるときである。ここで、

$$A(\cos 0, \sin 0), B(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ)$$

と表せるから、線分ABの垂直二等分線とx軸の正の向きがなす角は 60° である。これより、線分ABの垂直二等分線の方程式は、

$$y = \tan 60^\circ x \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $AP \perp BP$ となるのは、点P(x, y)が

$$AP \perp BP$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1, y) \cdot \left(x+\frac{1}{2}, y-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たすときである。よって、①、②より、点Pのx座標は、

$$\begin{aligned} (x-1) \left(x+\frac{1}{2} \right) + \sqrt{3}x \left(\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 4x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

であり、点Pのy座標は、

$$y = \sqrt{3} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

である。以上より、求める座標は、

$$(x, y) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4} \right)$$

である。

IV

$y = x^2$ のとき、 $y' = 2x$ であるから接線 l の方程式は、

$$y - a^2 = 2a(x - a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$$

である。さらに、直線 n の傾きを k とすると、接線 l と直線 n は垂直に交わるから、

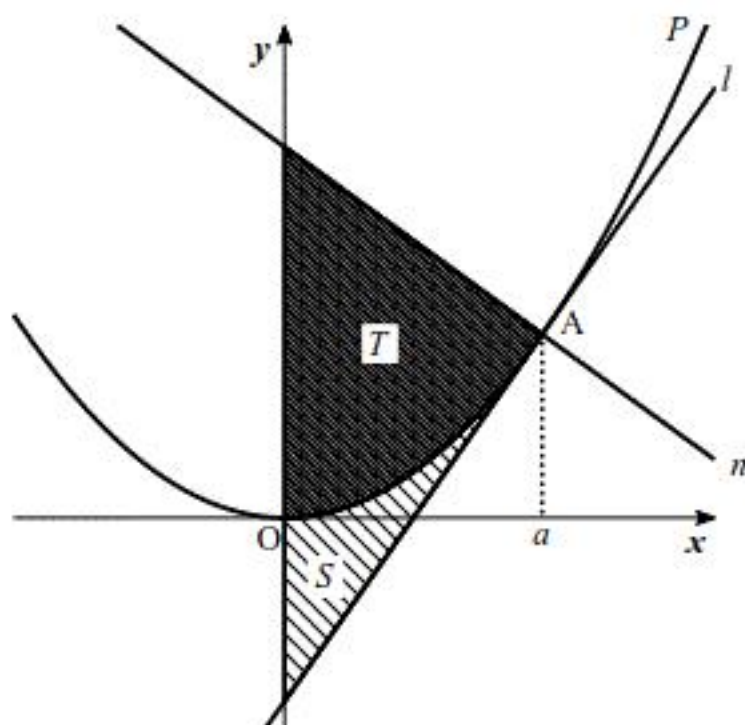
$$2a \cdot k = -1$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2a} \quad (\because a > 0)$$

となる。したがって、直線 n の方程式は、

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

となる。以下の図の各斜線部分の面積 S 、 T を求めることを考える。



上図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \left\{ \left(-\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4a}x^2 + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right)x \right]_0^a \\ &= \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

であるから、 $S:T=1:3$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} T &= 3S \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a &= a^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}a \left(a^2 - \frac{3}{4} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}a \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

V

$0 \leq x \leq \log 3$ の範囲において、 $e^x - 2$ の符号は

$$0 \leq x < \log 2 \text{ のとき : } e^x - 2 < 0$$

$$\log 2 \leq x \leq \log 3 \text{ のとき : } e^x - 2 \geq 0$$

であるから、求める定積分の値は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 3} |e^x - 2| dx &= -\int_0^{\log 2} (e^x - 2) dx + \int_{\log 2}^{\log 3} (e^x - 2) dx \\ &= -[e^x - 2x]_0^{\log 2} + [e^x - 2x]_{\log 2}^{\log 3} \\ &= -(2 - 2\log 2) + 1 + (3 - 2\log 3) - (2 - 2\log 2) \\ &= 4\log 2 - 2\log 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $4\log 2 - 2\log 3$