

立教大学数学科

受験番号				
	(算用数字で記入のこと)			

1996 年 度

V_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答用紙にはすでに受験番号がしるされています。
あなたの受験票の受験番号と一致しているか確認しなさい。
3. 試験開始後ただちに問題用紙と計算用紙の受験番号欄に、受験番号を算用数字で記入しなさい。
4. 解答は解答用紙の所定欄に記入しなさい。
5. この問題用紙は、試験終了後回収します。

I. 下記の(1)~(5)について、答のみ解答用紙の所定欄に記せ.

- (1) $2^{18} - 1$ を素因数分解したときにあらわれる素数のうち最大のものを求めよ.
- (2) $a = \frac{1}{2}$ のとき $\log_a 1024$ の値を求めよ.
- (3) 関数 $\frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$ の $0 < x < 1$ での最小値を求めよ.
- (4) 1 から n ($n \geq 2$) までの番号のついた n 枚のカードが1つの袋の中にはいっている. この袋から2枚のカードを同時にとり出して大きい方の数字を X とする. このとき X の期待値 $E(X)$ を求めよ.
- (5) 方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ は2重解をもち, 方程式 $x^3 - cx = 0$ と2個の実数解を共有する. このとき, a, b, c の値を求めよ.

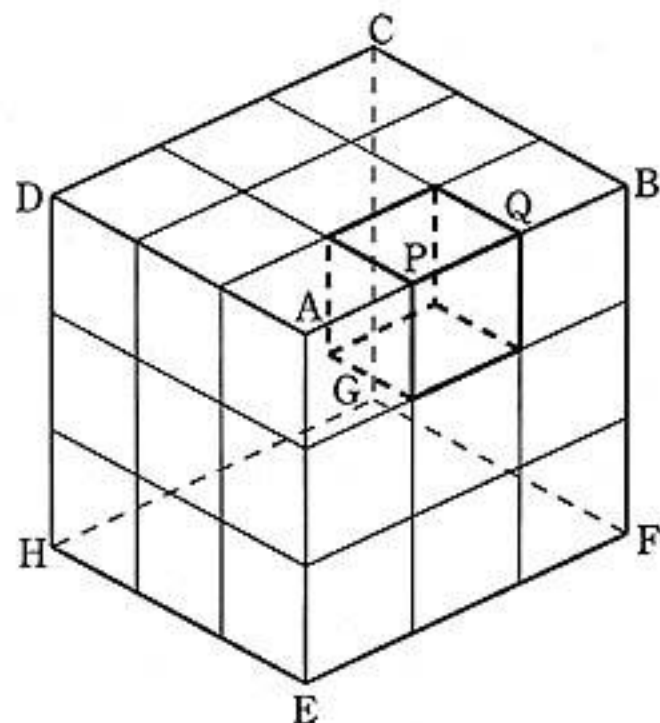
II. 立方体 ABCD-EFGH において, 頂点の座標は

$$A(3, 3, 3), \quad B(-3, 3, 3), \quad C(-3, -3, 3), \quad D(3, -3, 3)$$

$$E(3, 3, -3), \quad F(-3, 3, -3), \quad G(-3, -3, -3), \quad H(3, -3, -3)$$

とする. また $P(1, 3, 3), Q(-1, 3, 3)$ とする.

- (1) 辺 BC, 辺 CD, 辺 DH の中点を通る平面 α の方程式を求めよ.
- (2) この立方体を座標平面に平行な平面で, 1 辺の長さ 2 の 27 個の小立方体に分ける. これらの小立方体のうち PQ を 1 辺とするものと, 平面 α との距離を求めよ.
- (3) これらの 27 個の小立方体のうち平面 α と交わるものはいくつあるか.



Ⅲ. xy 平面上に、点 $(2, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_1 と、点 $(0, 4)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円 C_2 がある。また、原点 $(0, 0)$ を通る直線で、 x 軸と角 θ で交わるものを l_θ とする。ここで、角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たし、かつ l_θ が円 C_1, C_2 と交わらないような範囲を動くものとする。

(1) 円 C_1, C_2 を l_θ のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を、それぞれ $V_1(\theta), V_2(\theta)$ とする。 $V_1(\theta), V_2(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(2) $V_1(\theta) + V_2(\theta)$ の最大値を求めよ。

Ⅳ. $0 < a < 1$ を満たす実数 a と自然数 n に対して

$$A = \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{n}} \cos \frac{2\pi}{n} & -a^{\frac{1}{n}} \sin \frac{2\pi}{n} \\ a^{\frac{1}{n}} \sin \frac{2\pi}{n} & a^{\frac{1}{n}} \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

とおく。平面上の点 $P_k(x_k, y_k)$ を

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義する。線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを l_k とするとき、次の間に答えよ。

(1) $\frac{l_2}{l_1}$ を求めよ。

(2) 無限級数

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_k + \dots$$

の和を L_n とするとき、 L_n を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ を求めよ。