

T_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒芯のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**12頁**までとなっています。試験開始後、ただちに頁数を確認してください。なお、問題番号はI～IVとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄イ～チにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$$

が無数の解をもつとき $a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ロ}}$ である.

(2) 次の極限值を計算せよ. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 \sin^2 x - x^2 \sin^2 a}{x - a} = \boxed{\text{ハ}}$.

(3) 方程式 $y = -x^2 + a_n x + b_n$ で定義された放物線 C_n の頂点の x 軸からの高さは $\frac{10}{2^n}$, x 軸との交点の x 座標は α_{2n} , α_{2n+1} ($\alpha_{2n} < \alpha_{2n+1}$) である.
 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{2n-1} = \alpha_{2n}$ であるとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \boxed{\text{ニ}}$ である.

(4) $8^{n-1} < 10^{39} \leq 8^n$ となる自然数 n は $\boxed{\text{ホ}}$ である. このとき 8^n の 1 の位の数字は $\boxed{\text{ヘ}}$ であり最高位の数字は $\boxed{\text{ト}}$ である. ただし,

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 7 = 0.8451$$

とする.

(5) 円周上に10個の点がある. その中の1点 A から出発し, サイコロをふるごとに偶数の目 e が出たら時計回りに e 個進み, 奇数の目 f が出たら反時計回りに f 個進むという操作を3回くり返す試行において, 試行後に1周して元の点 A に戻る確率は $\boxed{\text{チ}}$ である.

II. l は正の定数とする. x 軸上の点 $P = (a, 0)$, y 軸上の点 $Q = (0, b)$ は次の条件を満たしながら動くものとする.

$$a + b = l, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

(i) $0 \leq t \leq l$ なる t を固定したとき, 直線 $x = t$ と線分 PQ の交点の y 座標の最大値を求めよ.

(ii) 線分 PQ が動いた範囲の面積を計算せよ.

Ⅲ. 平面において、点 P は曲線 $C_1: y = x^2$ 上を、点 Q は曲線 $C_2: y = -x^2 + 8x - 15$ 上を動くものとする。

(i) 線分 PQ の長さが最小となるとき、点 P における C_1 の接線と点 Q における C_2 の接線は共に、 P と Q を通る直線に垂直であることを示せ。

(ii) 線分 PQ の長さの最小値および最小値を与える点 P, Q の座標を求めよ。

IV. $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, $\beta = \frac{2\pi}{11}$ とし,

$$f(n) = |(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - (\cos \beta + i \sin \beta)^n|$$

とする. n が自然数を動くとき次の問に答えよ. ただし i は虚数単位である.

(i) $f(n)$ が最小となるすべての n を求めよ.

(ii) $f(n)$ が最大となるすべての n を求めよ.