

O a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒芯のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12頁までとなっています。試験開始後、ただちに頁数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄イ～へにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ.

- (1) 複素数 $(1+i)^{10}$ が $a+bi$ (a, b は実数) に等しいとすると

$$a = \boxed{\text{イ}}, b = \boxed{\text{ロ}}$$

である (ただし i は虚数単位).

- (2) 3つの数

$$\sin \theta, 2 \sin 2\theta, 4 \sin 4\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

が、この順序で等比数列になっているとき $\theta = \boxed{\text{ハ}}$ である.

- (3) 直線 $y = x$ と放物線 $y = (x-n)^2$ で囲まれた図形の面積を S_n とする (n は自然数). このとき

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^\alpha}$$

が存在して、かつ $L \neq 0$ となるのは $\alpha = \boxed{\text{ニ}}$ のときである.

- (4) 一辺の長さ2の立方体を V とする. いま V の各頂点を中心として半径1の球を配置したとき、どの球の内部にも含まれない V の部分を W とする. W に含まれる球の最大半径は $\boxed{\text{ホ}}$ である.

- (5) テニスサークルを作りたい. このサークルにおいて、二人以上の人の誕生日が同じ月になる確率が $\frac{1}{2}$ より大きくなるためには $\boxed{\text{ヘ}}$ 人以上の人が集まればよい.

II. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は次の条件

$$\begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{b}|}{3\sqrt{2}} = \frac{|\vec{c}|}{3\sqrt{3}} \\ 3\sqrt{3}\vec{a} + 3\sqrt{2}\vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0} \end{cases}$$

をみたすとする.

(i) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度を求めよ.

(ii) ベクトル $t\vec{a} - \vec{c}$ と $\vec{b}$ が直交するように実数 t を定めよ.

Ⅲ. F を次の不等式

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 1 \leq y \leq e \\ xy \leq e \end{cases}$$

の表す xy 平面の領域とする. ただし, e は自然対数の底である.

(i) F を図示し, その面積を求めよ.

(ii) 点 (x, y) が F 上を動くとき, $(\log x)(\log y)^2$ の最大値を与える点 (x, y) と最大値を求めよ.

IV. xy 平面上の3点 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形を T とする.
また, 点 (a, b) を頂点とする放物線の上部

$$y \geq (x - a)^2 + b$$

を $U(a, b)$ とする.

(i) $U(a, b)$ が T と共有点をもつために a, b のみたすべき条件を求めよ.

(ii) (i) の条件をみたす点 (a, b) の範囲を図示せよ.