

I. 次の空欄イ～へにあてはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $y = x^3$ と $y = 3ax + 2$ が3つの異なる交点をもつための必要十分条件は $a > \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) 空間の3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, p)$, $B(3, 0, -4)$ について、三角形 OAB の面積が $5\sqrt{2}$ で、 $p > 0$ のとき、 $p = \boxed{\text{ロ}}$ である。

(iii) 複素数 $z_k = \left(\frac{1+i}{2}\right)^k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) がある。複素平面上で $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ を結ぶ折線の長さは $\boxed{\text{ハ}}$ である。ただし、 i は虚数単位である。

(iv) 2^{2001} は $\boxed{\text{ニ}}$ 桁^{けた}の整数であり、1の位の数字は $\boxed{\text{ホ}}$ である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とせよ。

(v) 競技会のマラソンとハンマー投げの2種目に日本からそれぞれ2人の選手が出場した。この4人による日本の金・銀・銅メダルの取得数のパターンは $\boxed{\text{ヘ}}$ 通りある。ただし、同点により同じメダルを分け合うことはないものとする。

Ⅱ. 次の命題(i)～(iii)のそれぞれについて、真偽をいえ. 真のときにはその証明を, 偽のときには反例をあげよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, $x + y + z = 0$ のとき, x, y, z の少なくとも1つは0である.

(ii) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$ のとき, どのような自然数 n に対しても, $S_n < \frac{3}{4}$ である.

(iii) $x^2 + y^2 \leq 4$ のとき, $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ である.

Ⅲ. 連立不等式

$$\begin{cases} (y - x^2 - 2x + 1)(y - x - 1) \leq 0 \\ |x + 1| \leq 2 \end{cases}$$

の表す領域 D について次の問 (i), (ii) に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

- (i) 領域 D を図示せよ.
- (ii) 領域 D の面積を求めよ.

IV. ある斜面に向かってボールを投げる. 斜面は図のように $y = x \tan \alpha$ と表わされる.

ボールを投げる人の高さは無視し, ボールを投げてから t 秒後のボールの位置 (x, y) は $x = vt \cos \theta$, $y = vt \sin \theta - at^2$ と表わされる. ただし, v と a は正の定数であり, $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, $\alpha \leq \theta < 90^\circ$, $t > 0$ とする. このとき, 次の問(i)~(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) ボールが斜面に落下するのは, ボールを投げてから何秒後か.

(ii) ボールが斜面に落下したときの x 座標 x_p を求めよ.

(iii) x_p を最大にする θ を求めよ.

