

I . 下記の空欄イ～へにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) $\left(\frac{3}{2}\right)^n > 10^{10}$ となる最小の自然数 n は イ である. ただし,

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$$

とする.

(2) θ の関数

$$|\cos \theta + \sin \theta - 1|$$

の最大値は ロ で, 最小値は ハ である.

(3) 複素数 z が

$$(z-1)(\bar{z}-2) = iz$$

を満たせば $z =$ ニ である. ただし, i は虚数単位, $\bar{z}$ は z と共役な複素数とする.

(4) さいころを 4 回投げて出た目を順に a, b, c, d とするとき, 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の逆行列が存在する確率は ホ である.

(5) n を自然数とするとき, 和

$$\sum_{k=0}^{20n-1} \left[\frac{21}{20} k \right]$$

は ヘ となる. ただし, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す.

Ⅱ. a を正の実数とし, C を関数 $y = e^{ax}$ のグラフとする. C 上の点 P の直線 $y = x$ に関して対称な点を P' とする. 線分 PP' の長さの最小値を $f(a)$ で表すとき, $f(a)$ を求めそのグラフの概形を描け.

Ⅲ. a を正の定数とする. $x > 0$ で定義され, 常に正の値をとる関数 $f(x)$ で, 次の等式

$$\int_a^x (x+t)f(t) dt = x-a$$

を満たすものを求めよ. なお,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

である.

IV. 座標平面上の 12 点 $(\pm 2, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ のそれぞれを中心とする半径 r の円を描き, 原点を通る任意の直線が上の 12 の円のいずれかと共有点をもつようにしたい. 半径 r の最小値を求めよ.