

I. 次の空欄イ～ホにあてはまる数を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき、 $z^6 =$ である。ただし、 i は虚数単位を表す。

(ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$ は小数第 位にはじめて0でない数が現われる。 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(iii) 中心O、半径1の円外の一点Pからこの円に引いた2本の接線の接点をA、Bとする。 $OP = \sqrt{3}$ のとき、内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の値は である。

(iv) a, b, c, d, e, f の文字すべてを一度だけ用いて得られる文字列のうち、abc という文字列を含まないものは 個であり、abc という文字列は含まないが ef という文字列を含むものは 個である。

Ⅱ. 方程式 $4x + 5y = m$ ($m > 0$), $x + y = n$ ($n > 0$) がある. 次の問(i)~(iv)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) x, y を m, n で表せ.

(ii) $x > 0, y > 0$ で解をもつとき, n の範囲を m で表せ.

(iii) このとき解の存在領域を m と n のグラフ中に斜線で表せ. ただし, $m \leq 10$ とする.

(iv) さらに m, n が整数のとき, $m \leq 10$ での解 (x, y) をすべて求めよ.

Ⅲ. 直線 $y = ax$ と曲線 $y = -x^2 + 8x$ があり, $x > 0$, $y > 0$ の範囲で交点をもつものとする. このとき次の問(i), (ii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) a の範囲を求めよ.

(ii) 直線と曲線に囲まれた図形の面積を S_1 , この直線と曲線および x 軸に囲まれた図形の面積を S_2 とすると $S_1 : S_2 = 1 : 7$ となる. このときの a の値を求めよ.

IV. 徒歩での旅行を計画している2人の学生AとBがいて、彼らの体力、脚力は全く同じである。2人共に休日明けの日は1日に x km 歩くことができるが、次の日からは疲れて前日の r 倍 ($0 < r < 1$) の距離となり次第に短くなっていく。そこでAは3日間連続で歩き1日休む4日周期で旅行し、Bは6日間連続して歩き1日休む7日周期で旅行する計画を立てた。2人共同じ日から旅行を始め、1ヶ月(30日)たった時点での2人の歩いた距離を比べる。次の問(i)~(iv)に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) この間にAとBはそれぞれ何回の休日をとることになるか。

(ii) この間にAとBが歩く距離をそれぞれ求めよ。

(iii) 1ヶ月たった時点でAとBの歩いた距離が同じになる r があればそれを求めよ。なければ「なし」と答えよ。

(iv) $r = 0.9$ のとき、AとBの歩いた距離はどちらのほうが多いかを理由を付けて答えよ。