Ⅰ

イ. $2+\sqrt{31}$　　ロ. $\dfrac{4}{27}$

ハ. e^2+2　　ニ. $\dfrac{1}{2}$

ホ. $\dfrac{a}{2a+1}$

Ⅱ

(i) $(x-1)^2+m^2x^2-4=0$

$(1+m^2)x^2-2x-3=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+3(1+m^2)}}{1+m^2}$$

P, Q は

$$\left(\frac{1+\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2},\ \frac{m+m\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2}\right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2},\ \frac{m-m\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2}\right)\ \cdots\ (答)$$

(ii) (i)より

$$X=\frac{1}{1+m^2},\quad Y=\frac{m}{1+m^2}\ \cdots\ (答)$$

(iii) $m^2\geqq 0$　　$\therefore\ 1+m^2\geqq 1$

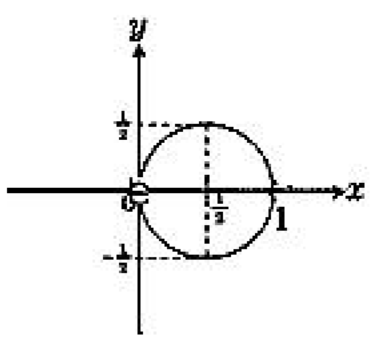
$\therefore\ 0<\dfrac{1}{1+m^2}\leqq 1$

つまり $0<X\leqq 1$ … (答)

(iv) $X^2+Y^2=\dfrac{1+m^2}{(1+m^2)^2}=\dfrac{1}{1+m^2}=X$

$\therefore\ \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+Y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

ただし $0<X\leqq 1$ ((iii)より)



M の軌跡の方程式

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

上図の円の $(0,0)$を除いた部分

Ⅲ

(i) $x=\tan\theta,\quad y=\sin 2\theta$

$x=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　$x\cos\theta=\sin\theta$

$\therefore\ x^2\cos^2\theta=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$\therefore\ (x^2+1)\cos^2\theta=1$

$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{1}{x^2+1}$

$y=2\sin\theta\cos\theta=2x\cos^2\theta=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(答) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$

(iii) $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

$x=\tan\theta$ なので、$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$x\geqq 0$

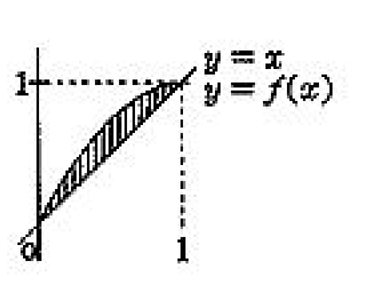
x	0	…	1	…
$f'(x)$	／	+	0	−
$f(x)$	0	↗	1	↘

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-2\cdot 2x(x^2+1)\cdot 2(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

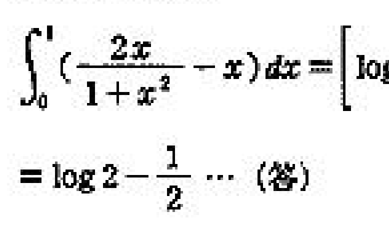
$$=\frac{-4x^3-4x+8x^3-8x}{(x^2+1)^3}=\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$$

x	0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	0	∩	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	∪

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0\quad より\right)$$



(iv)



上図のようになっているので

求める面積は

$$\int_0^1\left(\frac{2x}{1+x^2}-x\right)dx=\left[\log(1+x^2)-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$=\log 2-\dfrac{1}{2}$ … (答)