

I

$$\text{イ. } 2 + \sqrt{31} \quad \text{ロ. } \frac{4}{27}$$

$$\text{ハ. } e^2 + 2 \quad \text{ニ. } \frac{1}{2}$$

$$\text{ホ. } \frac{a}{2a+1}$$

II

$$(i) (x-1)^2 + m^2 x^2 - 4 = 0$$

$$(1+m^2)x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3(1+m^2)}}{1+m^2}$$

P, Q は

$$\left(\frac{1+\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2}, \frac{m+m\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2} \right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2}, \frac{m-m\sqrt{3m^2+4}}{1+m^2} \right) \quad \dots (\text{答})$$

(ii) (i) より

$$X = \frac{1}{1+m^2}, \quad Y = \frac{m}{1+m^2} \quad \dots (\text{答})$$

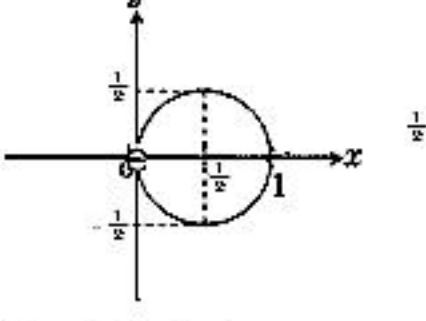
$$(iii) m^2 \geq 0 \quad \therefore 1+m^2 \geq 1$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{1+m^2} \leq 1$$

つまり $0 < X \leq 1$ $\dots (\text{答})$

$$(iv) X^2 + Y^2 = \frac{1+m^2}{(1+m^2)^2} = \frac{1}{1+m^2} = X$$

$$\therefore \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ただし $0 < X \leq 1$ ((iii) より)

M の軌跡の方程式

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

上図の円の $(0, 0)$ を除いた部分

III

$$(i) x = \tan \theta, \quad y = \sin 2\theta$$

$$x = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad x \cos \theta = \sin \theta$$

$$\therefore x^2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\therefore (x^2 + 1) \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$y = 2 \sin \theta \cos \theta = 2x \cos^2 \theta = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(\text{答}) y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$(iii) f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

 $x = \tan \theta$ なので, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ より $x \geq 0$

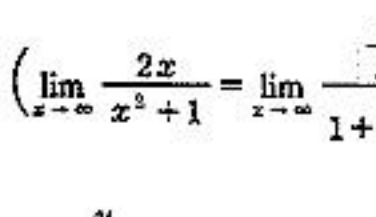
x	0	...	1	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	0	/	1	\

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2 + 1)^2 - 2 \cdot 2x(x^2 + 1) \cdot 2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

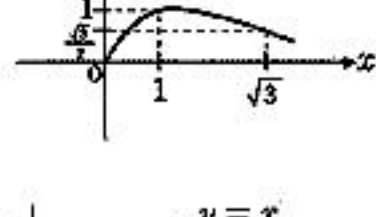
$$= \frac{-4x^3 - 4x + 8x^3 - 8x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

x	0		$\sqrt{3}$
$f''(x)$	0	-	0
$f(x)$	0	$\cap$	$\cup$

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \text{ より} \right)$$



$$(iv) \text{ } y = x, \quad y = f(x)$$



上図のようになっているので

求める面積は

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{1+x^2} - x \right) dx = \left[\log(1+x^2) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \log 2 - \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

IV

$$(i) 1 \text{ だけ } \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

2 だけ, 3 だけでも同じ

$$1 \text{ か } 2 \text{ だけ } \left(\frac{2}{3} \right)^n - 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

2 か 3 だけ, 1 か 3 だけでも同じ

よって 1, 2, 3 がすべて入っている確率は,

$$1 - {}_3C_1 \left(\frac{1}{3} \right)^n - {}_3C_2 \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^n - 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \dots (\text{答})$$

(ii) 1 が k 回つづいて, そのあと 2 が l 回,3 が $n - (k+l)$ 回とする。

$$0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq l \leq n - k$$

この確率は

$$\left(\frac{1}{3} \right)^k \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^l \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-(k+l)} = \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

求める確率は

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \sum_{l=0}^{n-k} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = \sum_{k=0}^n (n-k+1) \left(\frac{1}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \frac{1}{2} (n+1)(n+2)$$

(iii) $a_1 + \dots + a_n$ が 4 の倍数な確率を p_n ,4 の倍数 +1 となる確率を q_n , 4 の倍数 +2 となる確率 r_n , 4 の倍数 +3 となる確率 s_n とすると

$$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$$

$$p_{n+1} + 1 = \frac{1}{3} (q_n + r_n + s_n) = \frac{1}{3} (1 - p_n)$$

$$\therefore p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{4} \right) =$$

$$\dots = \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left(p_1 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad (\because p_1 = 0)$$

$$\therefore p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad \dots (\text{答})$$