

I. 次の空欄イ～へにあてはまる数または式を記入せよ。解答は解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 横が縦より長い長方形から、この長方形の縦の辺を1辺とする正方形を片側から切り取ったとき、残った長方形の縦と横の長さの比が、元の長方形の横と縦の長さの比に等しかった。このとき、元の長方形の横の長さを1とすると縦の長さは である。

(ii) 3次式 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ を $x^2 + x - 2$ で割ったときの余りが $2x - 1$ ならば、係数 a は , 係数 b は である。

(iii) 中心 $(3, 0)$ 、半径2の円に、点 $P(0, 2)$ から2本の接線を引く。このうち傾きが負の接線の方程式は $y =$ である。

(iv) $\sin x - \sin y = \frac{1}{2}$, $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}$ のとき、 $\cos(x + y)$ は である。

(v) 複素数平面上にあり、中心が $1 + i$ の正24角形の頂点を反時計回りの順に並べたものを $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{24}$ とする。 $\alpha_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ のとき、 $\alpha_5 =$ である。

Ⅱ. 平面に2つの放物線 $y = x^2$, $y = a^2 - 3x^2$ ($a > 0$) が与えられている. このとき以下の問(i)~(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) 2つの放物線の交点の座標を求めよ.

(ii) 2つの放物線で囲まれた部分の中に2組の向かい合う辺がそれぞれ x 軸, y 軸に平行で頂点が放物線上にある長方形を考える. このような長方形の面積の最大値 M を a を用いて表せ.

(iii) 2つの放物線で囲まれた部分の面積を S とするとき, 比 $\frac{M}{S}$ の値を求めよ.

Ⅲ. 点Pは1辺の長さが1 cm の正60 角形の頂点Aから出発し、時計回りに次のように動くものとする. 最初の1 秒間に1 cm 進む, 次の1 秒間に2 cm 進む, その次の1 秒間に 2^2 cm 進む, $\dots$, k 秒後と $k + 1$ 秒後の間に 2^k cm 進む, $\dots$. 以下の n は正の整数を表すものとする. 次の問(i)～(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) n 秒後までに点Pが進んだ距離を L_n cm とする. L_n を n の式で表せ.

(ii) n 秒後に点Pがちょうど点Aの上にあるということがありえるか. 理由を付けて答えよ.

(iii) n 秒後に点Pが正60 角形をはじめて10 万周以上回るといふ. このときの n を求めよ. 必要であれば $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いよ.

Ⅳ. 1点, 2点, 3点と記された3種類のカード $\boxed{1\text{点}}$, $\boxed{2\text{点}}$, $\boxed{3\text{点}}$ が合せて12枚ある.
この中から1枚のカードを引くとき, $\boxed{1\text{点}}$ を引く確率は $\frac{1}{2}$, $\boxed{2\text{点}}$ を引く確率は $\frac{1}{3}$
であるとする. 次の問(i)~(iii)に答えよ. 解答は解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) カード $\boxed{1\text{点}}$, $\boxed{2\text{点}}$, $\boxed{3\text{点}}$ のそれぞれの枚数を求めよ.

(ii) この12枚のカードの中から同時に2枚を引くとき, 記されている2つの点数の高い
方の点数を獲得するというゲームを行う. このゲームでちょうど2点を獲得する確率を
求めよ.

(iii) (ii)のゲームにおける得点の期待値を求めよ.